

مقدمه مؤلف

ریاضیدان‌ها پولدارترین آدم‌های روی زمین هستند!

گلاب به رویتان در یک مکان اورژانسی (!) بودم که یک‌دفعه ارشمیدس‌گونه زدم بیرون و دویدم در اتاق اندرون و 200 km/h و 200 km/h (یعنی تندتند!) شروع به سیاه کردن کاغذ کردم و عرق از سر و روی بر کاغذ کا (!) می‌ریختم و ... نفس در سینه حبس کرده بودم و ... نیم‌ساعت بعد ... شانس آوردم کسی در خانه نبود و می‌توانستم با تمام وجود هیجانانگیز را بروز دهم! بی‌پرده!

تقریباً تا یک ساعت دور خانه می‌چرخیدم، بالا و پایین می‌پریدم، می‌خوابیدم روی زمین و دوباره بلند می‌شدم، پشتک می‌زدم، بشکن می‌ترکاندم، و خدا را شکر که جسارتاً حرکات موزون بلد نبودم ... ولی خب مثل فوتبالیست‌ها لباسم را درمی‌آوردم و دوباره می‌پوشیدم و ... خلاصه بساطی! تا به حال در عمرم هیچ‌وقت مثل آن لحظه خوشحال و هیجان‌زده نشده‌ام و کسانی که مرا می‌شناسند و می‌دانند چه آدم سرد و بی‌تفاوتی هستم (!)، اصلاً نمی‌توانند تصور چنین جلالت‌هایی (!) را بکنند.

و همه این‌ها چیزی نبود جز لذت ریاضی! (البته از نوع اورژانسی‌اش!)

بیش از یک ماه بود که داشتم شب و روز (واقعاً شب و روز و البته همراه با ول کردن دقیقاً تمام درس‌هایم!) روی یک مسئله ریاضی فکر می‌کردم. مسئله را معلم هندسه‌مان (آقای نجابت: از همین‌جا دستش را می‌بوسم) به ما داده بود و جایزه هم داشت و بعدها فهمیدم که سؤال المپیاد بوده. نمی‌دانید وقتی بعد از آن همه تلاش توانستم سؤال را حل کنم چه حالی داشتم. وای خدای من! ممنون.

لذت‌های زیادی در این دنیا هست (اگرچه سختی‌هایش بیشتر است) ولی شیرین‌ترین لذت‌ها آن‌هایی هستند که نتیجه یک معامله‌اند؛ معامله‌ای که شما باید سختی‌هایی را تحمل کنید تا به آن لذت‌ها برسید. از نوع نابرده رنج، گنج میسر نمی‌شودش! مثلاً باید به خودت سختی بدهی، از خواب شیرین بگذری، صبح زود بیدار شوی و نماز بخوانی تا لذت آن را بچشی. شاید اگر نماز صبح ساعت ۱۰ بود، دیگر آن لذت را نداشت! شما الان در مرحله‌ای هستید که باید لذت‌هایی را که می‌توانید از زندگی ببرید، معلوم کنید؛ شاگرد اول شدن، قبول شدن در کنکور، رتبه زیر هزار شدن، رتبه ۱ کنکور شدن، مدال طلای المپیاد جهانی، ... کدام یکی را انتخاب می‌کنید؟ ... نکنند اصلاً به فکر لذت‌های دیگری هستید؟

باور درستی از خودتان داشته باشید!

تقدیم‌نامه!

میگن پشت هر مرد موفق کیه؟ آفرین، به زن موفق! این کتاب رو تقدیم می‌کنم به همسر موفقم 😊

شاید غیرریاضیدان‌ها (!) فکر کنند در عبارت بالا خواسته‌ام به طور ضمنی بگویم «من یک مرد موفق هستم!» اما ریاضیدان‌ها هرگز چنین فکر درستی (!) نمی‌کنند. ببینید: میگن «پشت هر مرد موفق به زن موفقه»، اما نگفتن که «هر زن موفق، پشت به مرد موفقه» یا این که «هر زن متأهل موفق، شوهرش هم موفقه»! نفهمیدید چی شد؟ خب به جور دیگه بگم؛ فرض کنید p و q دو گزاره باشند. می‌دونید که گزاره چیه؟ گزاره همان چیزی است که وقتی هم‌قد شما بودم، فکر می‌کردم همان «گزینه» است در تست‌ها! و بعد که کمی بزرگ‌تر شدم، فکر می‌کردم یعنی «عبارت» و بالاخره فهمیدم این «گزاره» را خیلی از بزرگ‌ترها هم نمی‌دانند که دقیقاً چیست و متأسفانه بعضی وقت‌ها اشتباه از آن استفاده می‌شود. سرتان را به دیوار نزنم (یعنی درد نیاورم!)؛ گزاره جمله‌ای خبری است که یا درست است یا نادرست، یعنی هم درست و هم نادرست نیست؛ حتی اگر درستی یا نادرستی آن معلوم نباشد. چند تا مثال برایتان بزنم تا روشن شوید:

- اسمت چیه کوچولو؟ — گزاره نیست، چون خبری نیست.

- این حق ایران است که انرژی هسته‌ای داشته باشد. — گزاره است.

(جمله بالا درست است. حتی اگر جزء سیاستمداران آمریکایی هم باشید و بگویید «نادرست» است، اولاً که اشتباه کرده‌اید، ثانیاً که باز هم گزاره است!)

- « $2+3=5$ » و « $6+7=10$ » — گزاره هستند. اولی درست و دومی نادرست است.

- تعداد عنکبوت‌های روی کره زمین، 10^{14} است. — گزاره است! لازم نیست بروید عنکبوت‌ها را بشمارید. بالاخره تعداد آن‌ها یا 10^{14} هست یا نیست دیگر! پس این جمله یا درست است یا نادرست، اگرچه نمی‌دانیم درست است یا نادرست.

- علی خوب است. — گزاره نیست؛ اولاً کدام علی؟ ما صد تا علی داریم (اگه منظور منم، درسته!) ثانیاً «خوب بودن» یعنی چه؟ منظور «حالش» است یا «اخلاق و ذاتش»؟ بعدش هم، معیارهای خوب بودن اصلاً چیست؟! پس این جمله می‌تواند هم درست باشد هم نادرست. من می‌گویم علی خوب است و بقال سر کوچه می‌گوید علی خوب نیست!

خب، پس فهمیدید گزاره چیست. اما داشتیم می‌گفتم فرض کنید p و q دو گزاره هستند. در این صورت اگر بتوانیم از p ، نتیجه بگیریم، می‌نویسیم $p \Rightarrow q$. مثلاً: $X=1 \Rightarrow X^2=1$ ، $X=1 \Rightarrow X^2+1=2$.

$p \Rightarrow q$ عکس $q \Rightarrow p$ است. وقتی $p \Rightarrow q$ درست است، لزوماً عکس آن درست نیست. اگر $p \Rightarrow q$ و $q \Rightarrow p$ هر دو درست باشند، می‌نویسیم $p \Leftrightarrow q$. راستی، $p \Rightarrow q$ را می‌خوانیم «اگر p آن‌گاه q » یعنی «اگر p درست باشد، آن‌گاه q درست است». $p \Leftrightarrow q$ را هم می‌خوانیم، «اگر و فقط اگر q ». یک چیزی هم بگویم؛ درستش این است که فلش‌های بالا تک‌خطی باشند. اما من در این مورد چیزی نمی‌گویم تا گیج نشوید!

خب یک چیز دیگر هم بگویم؛ نقیض یک گزاره، نقض‌کننده آن است. مثلاً نقیض $X=1$ می‌شود $X \neq 1$.

نقیض «هر عدد مثبت، بزرگ‌تر از صفر است.» می‌شود: «لزوماً همه اعداد مثبت بزرگ‌تر از صفر نیستند» یا «حداقل یک عدد مثبت وجود دارد که بزرگ‌تر از صفر نیست».

این را برای این گفتم که حالا بگویم عکس یک قضیه لزوماً درست نیست، اما عکس نقیض یک قضیه همیشه درست است. گفتم قضیه؛ این را هم بعد برایتان توضیح می‌دهم که چیست. فعلاً بگذارید داستان خودمان را تمام بکنیم!

بینید، میگن «پشت هر مرد موفق یه زن موفقه». یعنی:

① پشت من یک زن موفق است. $\Rightarrow$ من یک مرد موفق هستم.
خب این را قبول کرده‌ایم (یعنی آن قدر همه گفته‌اند که برای ما یک «اصل» شده! اصل را هم بعداً می‌گوییم که چیست!). عکس این مطلب، این‌طوری است:

② من یک مرد موفقم. $\Rightarrow$ پشت من یک زن موفق است.

خب این لزوماً درست نیست (اگر این درست می‌بود، آن وقت برداشت غیرریاضیدان‌ها در ابتدای سخنم درست می‌شد). یعنی با استناد به ①، نمی‌توان گفت ② درست است. چون عکس قضیه‌ها لزوماً درست نیستند. اما این درست است:

من یک مرد موفق نیستم. $\Rightarrow$ پشت من یک زن موفق نیست.
این عکس نقیض ① است و گفتیم که عکس نقیض مطالب و قضایای درست، درست‌اند.

حالا فهمیدید که چرا گفتیم ریاضیدان‌ها با خواندن متن تقدیم من، سوءبرداشت نمی‌کنند و درست مطلب را نمی‌گیرند؟! ریاضی همینش قشنگ است. اصلاً ریاضی همین است! یعنی «دقیق‌ترین»، «منطقی‌ترین»، «همه چیز سر جای خود»-ترین و «هیچ کس نمی‌تونه دروغ بگه»-ترین علم!

وقتی جلوی یک ریاضیدان نشسته‌ای، حتی باید این را هم ثابت کنی که $1 \times 1 = 1$! در واقع، یک ریاضیدان فقط چند تا تعریف و اصل را قبول دارد که در ابتدای کار لیستش را به تو می‌دهد و تو حق نداری هیچ چیز دیگری را (خارج از لیست او) بدون اثبات برایش رو کنی. حتی حق نداری هیچ حرفی را با یک هزارم درصد تردید بزنی. این جمله معروف را که نمی‌دانم از خودم هست یا نه (!)، به خاطر بسپارید: «ریاضی، نه دروغ می‌شناسد نه حدس و گمان، پس یک ریاضیدان واقعی، هیچ وقت سرش کلاه نمی‌رود!»

متأسفم، متأسفم و متأسفم که متأسفانه (!) تمام کسانی که رشته‌شان ریاضی نبوده، فکر می‌کنند ریاضی یک مشت جمع و تفریق و سینوس و تانژانت و مشتق و انتگرال و حد و هوپیتال و ... این جور چیزهاست! این‌ها بیشتر با جنبه‌های محاسباتی و کاربردی ریاضی مرتبط‌اند. ریاضی محض چنان زیباست، چنان هنری و چنان رمانتیک (!) که لذتی که ریاضیدانان در زندگی‌شان برده‌اند، جزء شیرین‌ترین لذت‌هاست (خود من هم نجشیده‌ام؛ اما میگن همین‌طوره!).

راستی، قول داده بودم چند تا چیز دیگر یادتان بدهم:

«اصل» چیزی است که درستی‌اش را بدون اثبات قبول می‌کنیم.

«لم» چیزی است که هنگام اثبات چیزی دیگر، آن را ثابت و از نتیجه‌اش استفاده می‌کنیم.

«فرض کردن» کاری است که ریاضیدان‌ها بیشتر از همه آن را باید انجام دهند!

«قضیه» چیزی است که وقتی درستی‌اش ثابت شد، قبولش می‌کنیم.

«حکم» چیزی است که باید با توجه به «تعاریف»، «اصل‌ها» و «فرض‌ها» اثباتش کنیم.

کتاب‌نامه!

به شدت سعی کرده‌ایم کتابی بنویسیم که:

① روان خوانده شود.

③ حرف اضافه به‌دردخور نداشته باشد.

امیدواریم موفق شده باشیم. 😊

② حوصله‌سربر نباشد.

④ برای کنکور پخته و حرفه‌ای باشد.

④ مثال‌هایی که در حین درسنامه مطرح شده‌اند، تشریحی و ساده‌اند. این مثال‌ها در عین سادگی، حرف‌های زیادی برای گفتن دارند و حتماً آن‌ها را حل کنید و جوابشان را با دقت بخوانید. حتی اگر شده، در حد یک روخوانی عادی!

④ علت ایجاد رنگ متفاوت برای این‌گونه حرف‌ها، این است که حجم زیاد مطالب درسنامه شما را نترساند و بدانید که این‌ها ریزه‌کاری‌ها و موشکافی‌های ماهستند.

⑥ فرمول‌ها و روش‌های خاص خیلی به‌دردبخور و کار راحت‌کن را جدا کرده‌ایم، چون دوستان داریم!

① در کادرهای این رنگی، مطالب اصلی هر قسمت گفته شده است. حرف‌هایی که در اکثر کتاب‌ها و کلاس‌ها بیان می‌شوند و حتماً باید بلد باشید.

② در کادرهای این رنگی، جزئیات، نکات ریز، تذکرها و ... را آورده‌ایم تا حساسی بر مطلب سوار شوید.

⑤ کادرهای این رنگی، تیرهایی هستند که می‌زنند وسط خال!

اگر فرمولی خارج از کتاب درسی سراغ دارید که در این کتاب مطرح نشده، حتماً فرمول به‌درد بخوری برای کنکور نبوده و اگر بعضی جاها روی برخی مفاهیم ایستاده‌ایم و کمی بیش از حد معمول حرف زده‌ایم، به خاطر اهمیت موضوع بوده است. این کتاب، هم شما را بر ریاضی (۱) دهم مسلط می‌کند و هم برای کنکور دو سال بعد، به طور جدی آماده‌تان می‌کند.

به نظر می‌رسد خواندن این کتاب، لذت‌بخش باشد! و عمیقاً امیدوارم از خواندن آن لذت ببرید. حرف‌ها، پیشنهادها و انتقادهای گران‌قدرتان را نیز از طریق  ali.bitarafoon یا  btaraafb301@gmail.com به گوشم برسانید. سپاس! 😊

فهرست



۷

فصل اول

مجموعه، الگو و دنباله



۴۹

فصل دوم

مثلثات



۸۵

فصل سوم

توان‌های گویا و عبارت‌های جبری



۱۱۳

فصل چهارم

معادله‌ها و نامعادله‌ها



۱۴۹

فصل پنجم

تابع



۱۹۳

فصل ششم

شمارش، بدون شمردن



۲۱۵

فصل هفتم

آمار و احتمال



۲۴۱

پاسخ‌های تشریحی



فصل اول مجموعه، الگو و دنباله

آقا اصلاً لاتی که در درس نخواندن هست، در پروفیسور شدن نیست! درس خواندن یک رابطه عجیب و غریب و لاینحلی با تنبلی دارد و خوب تنبل بودن هم می‌دانید که، لذت‌بخش‌ترین شغل دنیا است!

اصلاً خوشبخت‌ترین موجودات روی کره زمین، همین تنبل‌های درختی هستند! فکر کن آن ۹ ساعتی را که در شبانه‌روز بیدار هستی، بنشیننی بالای درخت و همین‌جور گذر عمر بی‌بیتی خیلی خوب است. ولی خوب این که یک بار در هفته غذا بخوری و از فرط کم‌حرکتی، خزه روی بدنت بروند، یک‌جوری است! البته فکر نمی‌کنم این‌ها چیزی از ارزش‌های تنبل درختی کم کند!

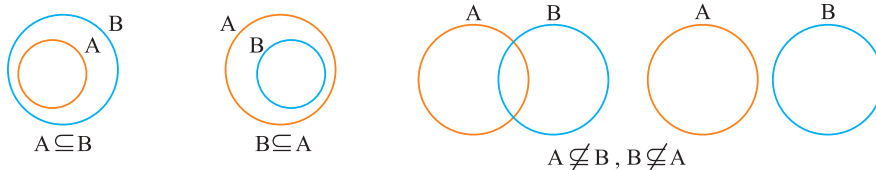
به نظرم بیا باید یک کمپین راه بیندازیم به اسم کمپین تنبل کنکوری! برویم نوبی تخت، زیر پتو و به کتاب‌های دور و برمان بپوزخند بزنیم و گذر کنکور ببینیم!

بالا غیرت! چرا همه انتظار دارند تنبل نباشیم؟ آقا همین الان، یک بار دیگر اون پسر رونالدو به بیرانوند خودمان پناهی بزنند، بیرانوند پناهی را بگیرد و ما در اوج پاره کردن حنجره ببریم بالا و بغل دستی‌مان هم از هیجان کتابش را بیندازد بالا و از قضا آن کتاب از جلوی چشمان عبور کند، ما در همان بالا که هستیم، پلک‌هایمان می‌آید پایین و خمیازه‌کشان با چشمانی پر خواب می‌افتیم زمین! اصلاً تحقیقات اخیر هم نشان داده که لذتی که در خوابیدن موقع مطالعه هست، در مطالعه موقع خوابیدن نیست!

مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

موضوع جالبی است! ولی اجازه دهید مثل کتاب درسی، ابتدا حرف‌هایی از مبحث مجموعه‌ها را یادآوری و تکمیل کنیم؛ بعد ببینیم داستان متناهی و نامتناهی چیست. یا انرژی شروع کنید. 😊

با عرض پوزش، مفهوم **مجموعه** در ریاضی تعریف مشخصی ندارد و ما عادت کرده‌ایم بگوییم مجموعه، دسته‌ای از اشیاء مشخص و متمایز است! مثلاً نمی‌توانیم «سه عدد طبیعی فرد» را یک مجموعه بدانیم. چون مشخص نیست کدام سه عدد فرد مدنظر است. همچنین مجموعه‌ای مثل $\{۲, ۳\}$ را به شکل $\{۲, ۳\}$ می‌نویسیم تا عضو تکراری نداشته باشیم. وقتی عدد یا شیء a متعلق به مجموعه A باشد، می‌گوییم a عضو A است: $a \in A$. پس $a \notin A$ یعنی a عضو A نیست. وقتی هر عضو مجموعه A در مجموعه B هم موجود باشد، می‌گوییم A زیرمجموعه B است و می‌نویسیم $A \subseteq B$.



راستی اگر $A = B$ باشد، آن‌گاه $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$ و برعکس!

این را هم بلدیم که یک مجموعه n عضوی، 2^n زیرمجموعه دارد که خود مجموعه و مجموعه تهی (فاقد عضو)، جزء آن‌هاست.

اجتماع، اشتراک و تفاضل مجموعه‌ها

اعمال اصلی بین مجموعه‌ها، همین‌ها هستند و فکر کنیم یک چیزهایی در موردشان یادتان باشد!

$A - B$	$A \cap B$	$A \cup B$
عضوهایی از A را شامل می‌شود که در B نباشند. در واقع باید عضوهای مشترک A و B را از A خط بزنیم.	شامل عضوهایی است که هم در A باشند هم در B .	شامل تمام عضوهایی است که عضو A یا B هر دو باشد. در واقع باید عضوهای دو مجموعه را بریزیم روی هم.
	بلد باشیم که: $A - B = A - (A \cap B)$	

مثال اگر $A \subseteq B$ باشد، آن‌گاه: $A \cap B = A$

پاسخ برای $A \cup B$ ، همهٔ اعضا را می‌ریزیم روی هم و تکراری نمی‌نویسیم: $A \cup B = \{۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸\}$

برای $A \cap B$ ، فقط مشترک‌ها: $A \cap B = \{۳, ۷\}$

برای $A - B$ ، مجموعه A را مبنای کارمان قرار می‌دهیم و مشترک‌ها را از آن خط می‌زنیم:

برای $B - A$ ، مجموعه B را مبنای کارمان قرار می‌دهیم و مشترک‌ها را از آن خط می‌زنیم:

مثال اگر A مجموعهٔ اعداد اول و B مجموعهٔ اعداد طبیعی فرد باشد، $A - B$ و $B - A$ را بیابید.

پاسخ مجموعه‌های A و B را ببینید:

$$\begin{aligned}
 A &= \{۲, ۳, ۵, ۷, ۱۱, ۱۳, ۱۷, ۱۹, ۲۳, \dots\} \\
 B &= \{۱, ۳, ۵, ۷, ۹, ۱۱, ۱۳, ۱۵, ۱۷, ۱۹, \dots\} \\
 A - B &= \{۲\} \\
 B - A &= \{۱, ۹, ۱۵, ۲۱, ۲۵, ۲۷, \dots\}
 \end{aligned}$$

بنابراین:

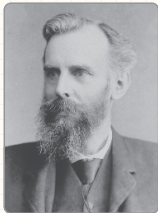
$A - B$ $A \cap B$ $B - A$	$A \cup B$ از سه زیرمجموعهٔ مجزا از هم $A - B$ ، $A \cap B$ و $B - A$ تشکیل شده است. $(A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$	اگر اشتراک دو مجموعه تهی باشد، آن دو مجموعه را جدا از هم یا مجزا می‌نامیم.
--	--	---

مثال اگر $A \cup B$ مجموعه مضارب دورقمی ۱۳ و $A \cap B$ مجموعه مضارب دورقمی ۲۶ باشد، اجتماع دو مجموعه $A - B$ و $B - A$ را بیابید.

پاسخ گفتیم $(A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$. سؤال می‌گوید: $A \cap B = \{۲۶, ۵۲, ۷۸\}$ ، $A \cup B = \{۱۳, ۲۶, ۳۹, ۵۲, ۶۵, ۷۸, ۹۱\}$ بنابراین:

مثال بی‌زحمت، حاصل عبارت‌های روبه‌رو را بیابید، ببینیم چه می‌شوند!

پاسخ خب $A \cap B$ زیرمجموعه A (و همین‌طور B) است. پس اجتماع این دو مجموعه می‌شود A (و این داستان، به قانون جذب معروف است): $A \cup (A \cap B) = A$
در مورد دومی، A (و همین‌طور B) زیرمجموعه $A \cup B$ است. پس اشتراک این دو مجموعه می‌شود A (دوباره جذب): $A \cap (A \cup B) = A$



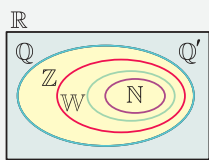
John Venn
1834 - 1923



یادداشت مؤلف

اجازه دهید در همین اوایل فصل مجموعه، از برادر جان ون عزیز، فیلسوف و منطق‌دان بریتانیایی تشکر کنیم که نمودارهای ون (همین نمودارهایی که در صفحه قبل کشیدیم) را ابداع کرد تا موقع کار کردن با مجموعه‌ها راحت‌تر باشیم. جان! دوست داریم!

مجموعه‌های اعداد معروف



خب ظاهرأ حرف‌های زیر، تابلوست:

$$\begin{aligned} N &\subset W \subset Z \subset Q \subset R \\ R - Q &= Q' \quad , \quad Q' \subset R \\ Q \cup Q' &= R \quad , \quad Q \cap Q' = \emptyset \end{aligned}$$

هر عدد حقیقی را می‌توان به شکل اعشاری نوشت. اگر تعداد ارقام بعد از ممیز متناهی باشد، عدد گویاست. مثل این اعداد:

$$۰/۳۵۷۸۱, ۲/۴۳۱, -۹۱/۳۲۹۰۷۴۲۹۳۸$$

اگر تعداد ارقام بعد از ممیز نامتناهی باشد، عدد در صورتی گویاست که یک یا چند رقم بعد از ممیز در حال تکرار باشد. مثل این اعداد:

$$۱/۳۳۳۳۳۰۰, ۲/۴۲۴۲۴۲۰۰, ۱/۸۲۵۵۵۵...$$

اگر تعداد ارقام بعد از ممیز نامتناهی باشند و نظم تکراری هم نداشته باشیم، عدد گنگ است. اعداد رادیکالی مثل $\sqrt{۲}$ ، $\sqrt{۳}$ ، $\sqrt{۵}$ ، ... و عدد π آشناترین اعداد گنگ هستند.

مجموعه اعداد طبیعی: $N = \{۱, ۲, ۳, ۴, \dots\}$

مجموعه اعداد حسابی:

$$W = \{۰, ۱, ۲, ۳, \dots\} = N \cup \{۰\}, \quad W - N = \{۰\}$$

مجموعه اعداد صحیح:

$$Z = \{\dots, -۲, -۱, ۰, ۱, ۲, \dots\} = \{-n \mid n \in N\} \cup W$$

در واقع، با اضافه کردن صفر به مجموعه اعداد طبیعی، اعداد حسابی به دست می‌آید و اگر قرینه اعداد طبیعی را هم به اعداد حسابی اضافه کنیم، می‌شود مجموعه اعداد صحیح.

مجموعه اعداد گویا:

$$Q = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in Z, n \neq 0 \right\}$$

اعداد گویا، کسرهایی با صورت و مخرج صحیح و مخرج غیرصفر هستند.

مجموعه اعداد گنگ (غیرگویا) را با Q' و مجموعه اعداد حقیقی را با R نشان می‌دهیم.

مثال درستی یا نادرستی هر یک از عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

(الف) $\{۰, \pm ۳\} \subseteq (Z - N)$

(ب) $۰/۲۵ \in (Q - Z)$

پاسخ (الف) درست نیست. مجموعه $Z - N$ فقط عدد صفر و قرینه اعداد طبیعی را شامل می‌شود. اعداد صفر و -۳ عضو این مجموعه هستند اما ۳ نه!

(ب) درست است. $Q - Z$ یعنی گویای غیرصحیح! خب $۰/۲۵ = \frac{۱}{۴}$ عدد گویا است ولی عدد صحیح به حساب نمی‌آید. جهت اطلاع، گویای صحیح مثل -۲ یا $۳ = \frac{۳۹}{۱۳}$.

مثال درستی یا نادرستی هر یک از عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

(الف) $(W \cap Z) \subseteq N$

(ب) $(Z - Q) \subseteq Q'$

(ج) $(Q - Z) \cap N = \emptyset$

(د) $(Q \cap Z) \subseteq N$

پاسخ (ب) و (ج) درست هستند ولی (الف) و (د) درست نیستند. در (الف)، دقت کنید که $W \cap Z$ همان W می‌شود و خب زیرمجموعه N نیست. در (ب)، دقت کنید که $Q - Z$ می‌شود $\emptyset$ که زیرمجموعه تمام مجموعه‌ها از جمله Q' است. در (ج)، $Q - Z$ هیچ عدد صحیحی را در خود ندارد و در نتیجه عدد طبیعی هم ندارد! در (د)، $Q \cap Z$ می‌شود Z که زیرمجموعه N نیست.



یادداشت مؤلف

چگونه می‌توانیم عددی مثل $۱/۳۳۳...$ را به شکل کسری با صورت و مخرج صحیح بنویسیم؟ این عدد را به شکل $۱/۳$ می‌نویسیم که خط بالای ۳ نشان‌دهنده تکرار آن است. ۳ قسمت گردشی نام دارد. برای تبدیل این عدد به کسر، قسمت صحیح را جدا می‌کنیم: $۱ + ۰/۳$. سپس در مورد $۰/۳$ ، یک خط کسری می‌کشیم که در صورت آن قسمت گردشی و در مخرج آن به تعداد ارقام گردشی، ۹ وجود دارد:

$$۱/۳ = ۱ + ۰/۳ = ۱ + \frac{۳}{۹} = ۱ + \frac{۱}{۳} = \frac{۴}{۳}$$

یک نمونه دیگر ببینید:

$$2/424242... = 2/42 = 2 + 0/42 = 2 + \frac{42}{99} = 2 + \frac{14}{33} = \frac{80}{33}$$

در مورد عددی مثل $1/825555...$ چه کنیم؟ کلاً داستان زیر را داریم:

قسمت غیرگردشی - قسمت گردشی و غیرگردشی
به تعداد ارقام گردشی ۹ و به تعداد ارقام غیرگردشی صفر

$$1/825555... = 1/825 = 1 + 0/825 = 1 + \frac{825 - 82}{900} = 1 + \frac{743}{900} = \frac{1643}{900}$$

مثلاً:

بازه (فاصله)

بازه نوعی مجموعه است که عضوهای آن اعداد حقیقی به هم چسبیده‌اند و نمایش آن بر روی محور اعداد حقیقی، به شکل قطعه‌ای از محور می‌شود. انواع بازه را ببینید:

نمایش هندسی	نمایش مجموعه‌ای	بازه	نمایش هندسی	نمایش مجموعه‌ای	بازه
	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$	$[a, b]$		$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$	$[a, +\infty)$
	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	(a, b)		$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$	$(a, +\infty)$
	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$	$[a, b)$		$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$	$(-\infty, b]$
	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$	$(a, b]$		$\{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$	$(-\infty, b)$

$+\infty$ نماینده عددهای حقیقی مثبت و خیلی بزرگ و $-\infty$ نماینده عددهای حقیقی منفی و خیلی کوچک است. دقت کنید که $+\infty$ و $-\infty$ عدد حقیقی نیستند.

$$\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$$

$$\mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$$

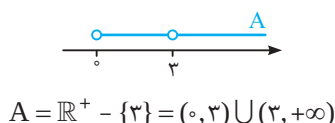
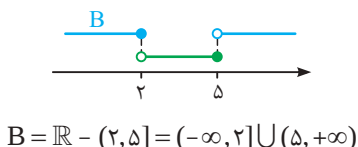
$$\mathbb{R}^- = (-\infty, 0)$$

در بازه‌هایی که دو سر آن‌ها عدد حقیقی است (بسته، باز، نیم‌باز)، مثل (a, b) ، اعداد a و b نقاط انتهایی بازه نامیده می‌شوند و به اختلاف آن‌ها یعنی $b - a$ طول بازه می‌گوییم.

در نمایش‌های بالا، فرض کرده‌ایم a و b دو عدد حقیقی هستند و $a < b$. اگر $a > b$ باشد، تمام بازه‌ها تهی خواهند بود. همچنین $[a, a] = \{a\}$ و $(a, a) = \emptyset$. بازه‌های به فرم $[a, b]$ را بسته و بازه‌های به فرم (a, b) ، $(a, +\infty)$ و $(-\infty, b)$ را باز می‌نامیم. بازه‌های به فرم $[a, b)$ ، $(a, b]$ ، $(a, +\infty)$ و $(-\infty, b]$ نیم‌باز محسوب می‌شوند.

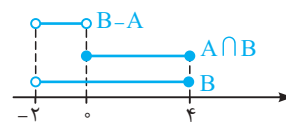
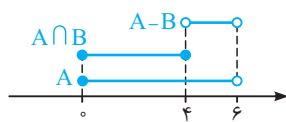
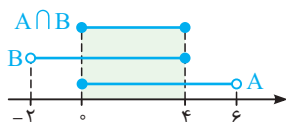
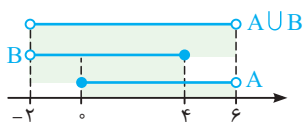
مثال مجموعه‌های $A = \mathbb{R}^+ - \{3\}$ و $B = \mathbb{R} - (2, 5]$ را به شکل اجتماع دو بازه بنویسید.

پاسخ نمایش دو مجموعه را روی محور ببینید:



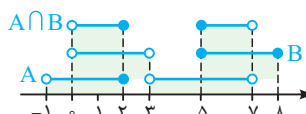
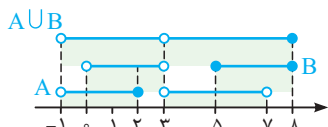
مثال اگر $A = [0, 6]$ و $B = (-2, 4]$ باشد، مجموعه‌های $A \cup B$ ، $A \cap B$ ، $A - B$ و $B - A$ را بیابید.

پاسخ به کمک نمایش هندسی روی محور، همه چیز را تمام می‌کنیم. برای این کار، لازم است هر دو بازه را روی یک محور (در دو سطر جداگانه) نمایش دهیم.



مثال اگر $A = (-1, 2] \cup (3, 7)$ و $B = (0, 3) \cup [5, 8]$ باشد، $A \cup B$ و $A \cap B$ را بیابید.

پاسخ بدون نمایش هندسی روی محور، ممکن است گیج شویم!



مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

مثال متناهی یا نامتناهی بودن مجموعه‌های زیر را مشخص کنید.

(الف) مجموعه شمارنده‌های طبیعی عدد ۴۸

(ب) مجموعه مضرب‌های طبیعی عدد ۱۷

(ج) مجموعه مولکول‌های موجود در یک مول مشخص از آب

(د) مجموعه تمام دایره‌های به مرکز مبدأ مختصات

(ه) اشتراک دو بازه جدا از هم

(و) مجموعه اعداد گویای بین ۱ و ۲

(ز) مجموعه اعداد گنگ بین ۱ و ۲

اگر تعداد عضوهای یک مجموعه برابر با عددی حسابی باشد، آن مجموعه **متناهی** و در غیر این صورت **نامتناهی** است. تعداد عضوهای یک مجموعه نامتناهی، از هر عددی که در نظر بگیریم، بزرگ‌تر است.

ممکن است تعداد عضوهای یک مجموعه متناهی خیلی زیاد باشد و نتوانیم به سادگی آن را مشخص کنیم. مثل مجموعه درخت‌های جنگل آمازون که متناهی است، حتی اگر تعداد آن‌ها را ندانیم.

اگر A مجموعه‌ای متناهی باشد، تعداد عضوهای آن را با $n(A)$ نشان می‌دهیم. راستی $\emptyset$ هم متناهی است: $n(\emptyset) = 0$ و یک چیز دیگر: بازه‌ها نامتناهی‌اند.

پاسخ خب (الف) و (ج) و (ه) متناهی‌اند، (ب) و (د) و (و) و (ز) نامتناهی‌اند.

مجموعه موردنظر در (الف) مساوی $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48\}$ و مجموعه موردنظر در (ب) به صورت $\{17, 34, 51, 68, 85, \dots\}$ است.

تعداد عضوهای (ج) را نمی‌توانیم بشمریم اما به هر حال تمام‌شدنی‌اند. در مورد (ه) دقت کنید که مجموعه موردنظر تهی است و در مورد (و) و (ز) دقت کنید که بین هر دو عدد حقیقی، بی‌شمار عدد گویا و بی‌شمار عدد گنگ وجود دارد.

مثال دو مجموعه نامتناهی مثال بزنید طوری که یکی زیرمجموعه دیگری باشد.

پاسخ مثلاً $\mathbb{N}$ و $\mathbb{Z}$. یا $A = [0, 6]$ و $B = [-2, 7]$.

مثال دو مجموعه نامتناهی مثل A و B مثال بزنید طوری که $A \subseteq B$ بوده و

$B - A$ تک‌عضوی باشد.

پاسخ $A = \mathbb{N}$ و $B = \mathbb{W}$ انتخاب خوبی است! $B - A$ می‌شود $\{0\}$.

فرض کنید $A \subseteq B$. غیر از دو حرف زیر، چیز دیگری نمی‌شود گفت!

① اگر A نامتناهی باشد، B نامتناهی است.

② اگر B متناهی باشد، A متناهی است.

مجموعه‌ای که حداقل یک زیرمجموعه نامتناهی دارد، حتماً نامتناهی است.

اجتماع دو مجموعه نامتناهی، حتماً نامتناهی است ولی اشتراک و تفاضل آن‌ها می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد. مثلاً مجموعه اعداد اول و مجموعه اعداد طبیعی زوج، نامتناهی‌اند ولی اشتراک آن‌ها $\{2\}$ متناهی است. اشتراک مجموعه‌های نامتناهی $[-1, 2]$ و $[0, 4]$ ، بازه نامتناهی $(0, 2)$ می‌شود.



یادداشت مؤلف

اجازه بدهید در همین ابتدای کار که هنوز مغزمان خنک است، تجزیه عبارت‌های درجه دوم را به کمک اتحاد جمله مشترک یادآوری کنیم. این مطلب را سال نهم خوانده‌اید و در فصل سوم این کتاب نیز به طور کامل‌تر یاد می‌گیرید. اما به دلیل اهمیت این موضوع و کاربرد آن در حل برخی تست‌های دو فصل اول، آن را این‌جا مرور می‌کنیم. اتحاد جمله مشترک، می‌گوید:

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

$$(x+5)(x-2) = x^2 + 3x - 10$$

مثلاً:

$$(3x-4)(3x-7) = (3x)^2 + (-4-7)(3x) + (-4)(-7) = 9x^2 - 33x + 28$$

حالا برای تجزیه عبارت درجه دومی مثل $x^2 + 3x - 10$ ، باید دو عدد پیدا کنیم که جمعشان ضریب x یعنی ۳ و ضربشان عدد ثابت -10 شود. خب آن دو عدد ۵ و -2 هستند و می‌نویسیم:

$$x^2 + 3x - 10 = (x+5)(x-2)$$

برای تجزیه $x^2 - 7x + 12$ ، دو عدد موردنظر -3 و -4 هستند:

$$x^2 - 7x + 12 = (x-3)(x-4)$$

و برای تجزیه $x^2 - 3ax + 2a^2$ ، دو عدد که جمعشان $-3a$ و ضربشان $2a^2$ شود، $-a$ و $-2a$ هستند:

$$x^2 - 3ax + 2a^2 = (x-a)(x-2a)$$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای درس ۱

سطح I

۱ اگر $A = \{2, 3, 6, 7, 8\}$ و $B = \{2, 4, 5, 6\}$ باشند، مجموعه $(A \cup B) - [A - (A \cap B)]$ چند عضو دارد؟

- ۱ (۲) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴)

(کتاب درسی)

۲ کدام گزینه درست است؟

- ۱ $\sqrt{2} \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$ ۲ $2 \in \mathbb{Z} - \mathbb{W}$ ۳ $0.7 \in \mathbb{Q} \cap \mathbb{Z}$ ۴ $\mathbb{W} - \mathbb{N} \subseteq (-\infty, 0]$

(ریاضی خارج ۹۴)

۳ اگر $A = \{1, 2, \{1, 2, 3\}\}$ ، $B = \{1, 2, 3, \{1, 2\}\}$ و $C = \{1, 2, 3\}$ باشد، کدام رابطه درست است؟

- ۱ $A - B = C$ ۲ $B - C = \emptyset$ ۳ $B - C = \{1, 2\}$ ۴ $A - B = \{C\}$

۴ مجموعه $\{3, \pi\}$ زیرمجموعه کدام یک از مجموعه‌های زیر است؟

- ۱ $(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) - \mathbb{Z}$ ۲ $\mathbb{R} - (\mathbb{Q} - \mathbb{Z})$ ۳ $\mathbb{Q} - (\mathbb{R} - \mathbb{Z})$ ۴ $(\mathbb{R} - \mathbb{Z}) - \mathbb{Q}$

۵ اگر $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leq 3\}$ و $B = \{2x + 3 \mid x \in A\}$ باشد، کدام گزینه درست است؟

- ۱ $A \cup B = (-1, 9]$ ۲ $\sqrt{2} \in A - B$ ۳ $\sqrt{10} \in B - A$ ۴ $(2, 3] \subseteq A \cap B$

۶ اگر A مجموعه اعداد طبیعی بخش پذیر بر ۶ و B مجموعه اعداد طبیعی دورقمی کمتر از ۴۰ و بخش پذیر بر ۳ باشند، مجموعه $B - A$ چند عضو دارد؟

- ۱ (۴) ۲ (۵) ۳ (۶) ۴ (۷)

(کتاب درسی)

۷ اگر $A = [-1, 4)$ و $B = (1, 7]$ باشد، حاصل کدام عبارت، یک بازه باز است؟

- ۱ $A \cup B$ ۲ $A \cap B$ ۳ $A - B$ ۴ $B - A$

(کتاب درسی)

۸ کدام مجموعه، شامل تعداد اعداد صحیح کمتری است؟

- ۱ $(3, +\infty) - [2, 4)$ ۲ $(-6, 10] \cap (6, +\infty)$ ۳ $[0, +\infty) - (4, +\infty)$ ۴ $[-2, 4) \cap \mathbb{Z}$

۹ چه تعداد از گزاره‌های زیر درست است؟

- الف) $(A \cap B) - A = \emptyset$ ب) $B - (A \cup B) = \emptyset$ ج) $(A \cup B) - A = B$ د) $A - (A \cap B) = A - B$
- ۱ (۴) ۲ (۳) ۳ (۲) ۴ (۱)

(کتاب درسی)

۱۰ کدام مجموعه متناهی است؟

- ۱ مجموعه کسرهای مثبت با صورت ۱
۲ اشتراک دو بازه $(0, 2)$ و $(1, 4)$
۳ مجموعه مضرب‌های طبیعی عدد ۱۰
۴ مجموعه سلول‌های عصبی مغز یک انسان

۱۱ در کدام یک از حالت‌های زیر، از نامتناهی بودن مجموعه A نتیجه می‌شود مجموعه B نیز نامتناهی است؟

- ۱ $A \cap B = B$ ۲ $A \cup B = A$ ۳ $A \cap B = \emptyset$ ۴ $A - B = \emptyset$

سطح Q

(ریاضی داخل ۹۲)

۱۲ اگر $A_i = [-i, \frac{9-i}{3}]$ و $i \in \{1, 2, 3, 4, \dots, 9\}$ ، آنگاه مجموعه $(A_2 \cap A_5) - (A_1 \cap A_7)$ به کدام صورت است؟

- ۱ $(1, 2) \cup (-2, -1)$ ۲ $[-2, -1] \cup [1, 2]$ ۳ $[-1, 1]$ ۴ $\emptyset$

۱۳ اگر $A = (-\infty, 0] \cup (2, 9]$ و $B = (-\infty, 4] - \{0\}$ باشد، مجموعه $A - B$ شامل چند عدد صحیح است؟

- ۱ (۴) ۲ (۵) ۳ (۶) ۴ (۷)

۱۴ اگر $A = [-4, +\infty)$ ، $B = (-\infty, 4]$ و $C = [-1, 6]$ باشد، کدام بازه زیرمجموعه $A - (B \cap C)$ است؟

- ۱ $(-\sqrt{2}, -1)$ ۲ $[-3, -\sqrt{3})$ ۳ $[4, +\infty)$ ۴ $[-2, 2)$

۱۵ چه تعداد از مجموعه‌های زیر، متناهی است؟

«مجموعه پستانداران روی کره زمین، مجموعه اعداد گنگ بین $\sqrt{2}$ و $\sqrt{3}$ ، مجموعه اعداد صحیح بین $-\sqrt{2}$ و $\sqrt{2}$ »

- ۱ (۳) ۲ (۲) ۳ (۱) ۴ (صفر)

۱۶ اگر مجموعه‌های $A = \{\frac{1}{x} \mid x \in \mathbb{N}\}$ و $B = \{\frac{x}{\lambda} \mid x \in \mathbb{N}\}$ مفروض باشند، کدام یک از مجموعه‌های زیر، متناهی است؟

- ۱ $A - B$ ۲ $B - A$ ۳ $A \cap B$ ۴ $A \cup B$

۱۷ اگر A مجموعه اعداد اول و B مجموعه اعداد طبیعی فرد باشند، کدام یک از مجموعه‌های زیر، متناهی است؟

$$A - B \quad (۴) \quad B - A \quad (۳) \quad A \cap B \quad (۲) \quad A \cup B \quad (۱)$$

۱۸ اگر A مجموعه‌ای نامتناهی و B مجموعه‌ای متناهی باشند، کدام مجموعه نامتناهی است؟

$$(A - B) - A \quad (۴) \quad A - B \quad (۳) \quad B - A \quad (۲) \quad A \cap B \quad (۱)$$

۱۹ چند عدد صحیح مانند k وجود دارد به طوری که متعلق به بازه $[۲k - ۱۱, ۳k + ۶]$ باشد؟

$$۱۴ \quad (۴) \quad ۱۲ \quad (۳) \quad ۱۲ \quad (۲) \quad ۱۱ \quad (۱)$$

۲۰ در مورد بازه $A = (x - ۲, ۵x - ۷)$ می‌دانیم که $۳ \in A$ و $۱۳ \notin A$. در این صورت، مجموعه تمام مقادیر ممکن برای a کدام است؟

$$\left(\frac{۵}{۴}, ۴\right] \quad (۴) \quad (۲, ۴) \quad (۳) \quad (۲, ۵) \quad (۲) \quad (۲, ۴) \quad (۱)$$

۲۱ اگر $A = [۲k - ۱, k + ۱۲]$ ، $B = [k, k + ۵]$ و مجموعه $A \cap B$ تک‌عضوی باشد، $A \cup B$ کدام است؟

$$[۶, ۱۲] \quad (۴) \quad [۱۱, ۲۲] \quad (۳) \quad [۶, ۱۸] \quad (۲) \quad [۳, ۲۱] \quad (۱)$$

۲۲ اگر دو بازه $(-۵, ۲a - ۵)$ و $(a + ۱, ۹)$ غیرتهی و جدا از هم باشند، حدود a کدام است؟

$$۲ < a \leq ۶ \quad (۴) \quad ۶ \leq a < ۸ \quad (۳) \quad ۰ < a \leq ۶ \quad (۲) \quad a < ۶ \quad (۱)$$

۲۳ اگر برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، $A_n = (-\frac{۲}{n}, \frac{n-۲}{n})$ به صورت بازه باشد، مجموعه $(A_۳ \cup A_۶) - A_۳$ برابر با کدام بازه است؟

$$\left[-\frac{۱}{۳}, \frac{۲}{۳}\right) \quad (۴) \quad \left(-\frac{۱}{۳}, \frac{۲}{۳}\right) \quad (۳) \quad \left[-\frac{۱}{۳}, \frac{۲}{۳}\right) \quad (۲) \quad \left(-\frac{۱}{۳}, \frac{۲}{۳}\right) \quad (۱)$$

۲۴ چه تعداد از گزاره‌های زیر، در مورد مجموعه‌های دلخواه A و B حتماً درست است؟

(الف) اگر A و B نامتناهی باشند، $A \cap B$ نامتناهی است.

(ب) اگر A و B متناهی باشند، $A \cup B$ متناهی است.

(ج) اگر $A \cap B$ متناهی باشد، A و B متناهی‌اند.

(د) اگر $A \cup B$ نامتناهی باشد، A و B نامتناهی‌اند.

$$۱ \quad (۲) \quad ۲ \quad (۳) \quad ۳ \quad (۴) \quad \text{صفر} \quad (۱)$$

سطح IQ

۲۵ اگر $A = [۳, ۸]$ ، آن‌گاه چند بازه مانند B وجود دارد که $B \subseteq A$ و مجموعه $A - B$ متناهی و غیرتهی باشد؟

$$۳ \quad (۱) \quad ۱ \quad (۲) \quad \text{بی‌شمار بازه} \quad (۳) \quad \text{هیچ بازه} \quad (۴)$$

۲۶ اگر $A - B = [۱, ۴]$ ، $A - B = [۶, ۸]$ و $B = [۴, ۸]$ باشد، A کدام است؟

$$[۱, ۶] \quad (۱) \quad [۱, ۶] \quad (۲) \quad [۴, ۶] \quad (۳) \quad [۴, ۶] \quad (۴)$$

۲۷ اگر در بازه $(\frac{x}{۲} - ۱, ۱۳)$ دقیقاً ۴ عدد اول وجود داشته باشد، مجموعه تمام مقادیر ممکن برای x کدام است؟

$$(۲, ۶] \quad (۱) \quad (۲, ۸) \quad (۲) \quad (۲, ۸] \quad (۳) \quad [۶, ۸) \quad (۴)$$

۲۸ اگر $(۱, m) \cap (n, ۸) = (۳, ۶)$ باشد، حاصل $(m - ۸, n + ۴) - (۰, ۸)$ کدام مجموعه است؟

$$(-۲, ۰] \cup (۴, ۶) \quad (۱) \quad (-۵, ۰] \cup (۸, ۱۰) \quad (۲) \quad (-۲, ۰] \quad (۳) \quad (-۵, ۰] \quad (۴)$$

۲۹ به‌ازای چند عدد صحیح k ، دو مجموعه $[۲k - ۵, ۲k + ۳]$ و $\mathbb{R} - [-۷, k + ۶]$ جدا از هم هستند؟

$$۴ \quad (۱) \quad ۵ \quad (۲) \quad ۶ \quad (۳) \quad ۷ \quad (۴)$$

۳۰ اگر $A = [-۳, ۷]$ ، $B = [۰, ۱۲]$ و $C = (-۸, k]$ باشد، به‌ازای چند عدد صحیح k ، مجموعه $C - (A - B)$ غیرتهی و برابر با یک بازه است؟

$$۳ \quad (۱) \quad ۵ \quad (۲) \quad ۶ \quad (۳) \quad ۷ \quad (۴)$$

۳۱ اگر مجموعه‌های A و B نامتناهی و مجموعه C متناهی باشد، کدام مجموعه متناهی است؟

$$(A - B) \cup C \quad (۱) \quad (A \cap C) - B \quad (۲) \quad (A - C) \cap B \quad (۳) \quad A - (B \cap C) \quad (۴)$$

۳۲ اگر بازه $(۵ - ۲n, n - ۶)$ حداقل n و حداکثر $۲n$ عدد صحیح را شامل شود، حاصل جمع مقادیر طبیعی n ، کدام است؟

$$۳۵ \quad (۱) \quad ۴۵ \quad (۲) \quad ۵۱ \quad (۳) \quad ۶۳ \quad (۴)$$

۳۳ اگر اشتراک بازه‌های $(-۳, ۷)$ ، $A = [-۳, ۷]$ و $B = [۰, ۱۲]$ باشد، به‌ازای چند عدد صحیح k ، مجموعه $C - (A - B)$ غیرتهی و برابر با یک بازه است؟

$$(۱) \text{ تهی است.} \quad (۲) \text{ غیرتهی و متناهی است.} \quad (۳) \text{ بازه باز است.} \quad (۴) \text{ بازه نیم‌باز است.}$$

۳۴ از نامتناهی بودن کدام مجموعه، می‌توان نامتناهی بودن مجموعه $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid ۱ \leq x \leq ۲\}$ را نتیجه گرفت؟

$$\left\{\frac{۱}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\} \quad (۱) \quad \left\{1 + \frac{۱}{\sqrt{n}} \mid n \in \mathbb{N}\right\} \quad (۲) \quad \left\{\frac{n+۱}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\} \quad (۳) \quad \left\{\frac{n-۱}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\} \quad (۴)$$

متمم یک مجموعه

در این درس، مجموعه مرجع و متمم یک مجموعه را می‌شناسیم و بعد به طرز بی‌ربطی (!) می‌رویم سراغ تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه. قدر این مطالب زیبا را بدانید!

مجموعه مرجع و متمم یک مجموعه

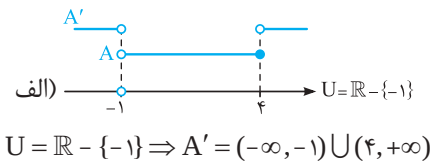
مثال اگر $\mathbb{Z}$ مجموعه مرجع باشد، متمم $\mathbb{W} - \mathbb{N}$ و $\{x: |x| \in \mathbb{N}\}$ را بیابید.
پاسخ خب $\mathbb{W} - \mathbb{N}$ می‌شود $\{0\}$ و متمم آن در مجموعه مرجع $\mathbb{Z}$ برابر است با مجموعه $\mathbb{Z} - \{0\}$.

همچنین $\{x: |x| \in \mathbb{N}\} = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\} = \mathbb{Z} - \{0\}$ و متمم آن در مجموعه مرجع $\mathbb{Z}$ می‌شود مجموعه تک‌عضوی $\{0\}$. درواقع، دو مجموعه مورد نظر در صورت سؤال، متمم یکدیگرند.

مثال اگر $\mathbb{N}$ مجموعه مرجع باشد، متمم مجموعه $A = \{2k \mid k \in \mathbb{N}\}$ را بیابید.
پاسخ مجموعه A شامل تمام اعداد طبیعی زوج است و متمم آن در $\mathbb{N}$ می‌شود. مجموعه اعداد طبیعی فرد. یعنی این: $A' = \{2k - 1 \mid k \in \mathbb{N}\}$

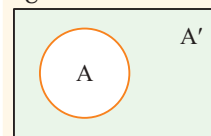
مثال الف) اگر $U = \mathbb{R} - \{-1\}$ مجموعه مرجع باشد، متمم مجموعه $A = (-1, 4]$ را بیابید.

ب) اگر $U = [-1, 5]$ باشد، جواب چیست؟



در هر مبحث، مجموعه‌ای را که همه مجموعه‌های مورد بحث، زیرمجموعه آن باشند، مجموعه مرجع می‌نامیم و معمولاً آن را با U نشان می‌دهیم.

هرگاه U مجموعه مرجع و $A \subseteq U$ باشد، آن‌گاه مجموعه $U - A$ را متمم A می‌نامیم و آن را با نماد A' (یا A^c) نشان می‌دهیم.

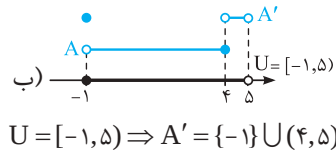


$$A' = \{x \in U \mid x \notin A\}$$

راستی، موقع بحث در مورد مجموعه‌های اعداد، اگر حرفی از مجموعه مرجع نزنند، آن را $\mathbb{R}$ می‌گیریم. این روابط تابلو را هم بلد باشید:

$$\emptyset' = U, U' = \emptyset, (A')' = A, A \cap A' = \emptyset, A \cup A' = U$$

پاسخ



مثال حاصل $W' - N'$ را بیابید.

پاسخ خب با توجه به رابطه $A' - B' = B - A$ ، می‌نویسیم:

$$N' - W' = W - N = \{0\}$$

مثال حاصل عبارت‌های زیر را بیابید.

$$A \cup (A' \cap B), \quad A \cap (A' \cup B)$$

❖ اگر $A \subseteq B$ باشد، آن‌گاه $A' \supseteq B'$ و برعکس

$$A \cap B' = A - B$$

❖ این را بلد باشیم که:

$$A' - B' = B - A$$

❖ بد نیست بدانیم که:

$$A' - B' = A' \cap B = B \cap A' = B - A$$

در واقع:

پاسخ $A' \cap B = B \cap A'$ همان $B - A$ است. یعنی عضوهای مشترک A و B را از B حذف کرده‌ایم. حالا در اجتماع‌گیری با A ، به $A \cup B$ می‌رسیم:

$$A \cup (A' \cap B) = A \cup B$$

$$A \cap (A' \cup B) = A \cap B$$

در مورد دومی، A با A' که اشتراکی ندارد. پس اشتراک A با $A' \cup B$ همان اشتراک A با B است:

راه دیگر این است که از قوانین توزیع‌پذیری (پخشی) استفاده کنیم. منظورم قوانین زیر است. در سمت چپی، اجتماع روی اشتراک پخش شده و در سمت راستی، اشتراک روی اجتماع پخش شده!

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (A' \cap B) = (A \cup A') \cap (A \cup B) = U \cap (A \cup B) = A \cup B$$

در مورد مثال بالا (معروف به قوانین شبه جذب)، می‌نویسیم:

$$A \cap (A' \cup B) = (A \cap A') \cup (A \cap B) = \emptyset \cup (A \cap B) = A \cap B$$

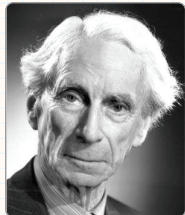


یادداشت مؤلف

برتراند راسل شیطون (!) در سال ۱۹۰۲ پارادوکسی کشف کرد که مخ همه را آورد توی کاسه! او گفت مجموعه تمام مجموعه‌ها، خود یک مجموعه است و در نتیجه عضو خودش می‌باشد. ولی خیلی از مجموعه‌ها عضو خودشان نیستند. مثلاً مجموعه تمام انسان‌ها، یک انسان نیست و عضو خودش نمی‌باشد. براساس همین شیطنت ساده، آمد این مجموعه را تعریف کرد که در آن U مجموعه تمام مجموعه‌هاست:

$$R = \{A \in U \mid A \notin A\}$$

بعد دو تا زکب جالب زد! اول اینکه ثابت کرد $R \notin R$. برای اثبات این موضوع فرض کرد این حرف غلط باشد و در واقع $R \in R$. چون هر مجموعه‌ای که عضو R است، این ویژگی را دارد که عضو خودش نیست، پس اگر $R \in R$ آن‌گاه $R \notin R$! این تناقض از فرض $R \in R$ ناشی شد، پس $R \notin R$. دوم اینکه ثابت کرد $R \in R$. برای اثبات این موضوع نیز فرض کرد این حرف غلط باشد و در واقع $R \notin R$. اما چون R شامل تمام مجموعه‌هایی است که عضو خودشان نیستند، پس اگر $R \notin R$ آن‌گاه $R \in R$. این تناقض از فرض $R \notin R$ ناشی شد، پس $R \in R$.



Bertrand Arthur
William Russell
1872 - 1970

عجب بساطی شد! راسل ثابت کرد $R \in R$ و $R \notin R$. این یک تناقض بزرگ است. اما این پارادوکس مسخره از کجا ناشی شده است؟ از تعریف R ؟ از کجای تعریف R ؟ درست است، از U ! از این‌که فرض شده U مجموعه تمام مجموعه‌هاست. راسل گفت: می‌دانید اصل موضوع چیست؟ U اصلاً وجود ندارد! ما مجموعه‌ای نداریم که شامل همه مجموعه‌های دیگر باشد.

برتراند آرتور ویلیام راسل یک فیلسوف و به طور دقیق‌تر همه‌چیزدان انگلیسی بود و ذهنی شک‌گرا داشت. اما چرا این چیزها را به شما می‌گویم؟ برای این‌که به جای پرسیدن سؤال کلیشه‌ای «ریاضی کجا به درمان می‌خورد؟»، ریاضی را بهتر بشناسید و از آن لذت ببرید. ریاضی یک مشت جمع و تفریق و حد و مشتق و انتگرال نیست. ریاضی یعنی فکر، استدلال، اکتشاف ... و ریاضی یعنی همه‌چیز!

قبل از این‌که به سراغ موضوع بعدی برویم، یک سؤال مفهومی (براساس مطالب حاشیه‌ای کتاب درسی) می‌پرسم: اگر جمعیت در سن کار در یک کشور را به عنوان مجموعه مرجع در نظر بگیریم و A نشان‌دهنده افراد شاغل این کشور باشد، نرخ بیکاری در این کشور چه خواهد بود؟ آفرین! مجموعه افراد بیکار A' و نرخ بیکاری، $\frac{n(A')}{n(U)}$ است.

تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه

مثال اگر $n(A) = 23$ ، $n(A \cap B) = 8$ و $n(A \cup B) = 39$ باشد، مجموعه B چند عضو دارد؟

پاسخ همه چیز را در رابطه $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ جای گذاری می‌کنیم:

$$39 = 23 + n(B) - 8 \Rightarrow n(B) = 24$$

مثال چند عدد طبیعی وجود دارد که شمارنده ۲۴ یا ۳۲ باشد؟

پاسخ مجموعه شمارنده‌های ۲۴ را A و مجموعه شمارنده‌های ۳۲ را B می‌گیریم. ما $A \cup B$ را می‌خواهیم از طرفی:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\} \Rightarrow n(A) = 8, B = \{1, 2, 4, 8, 16, 32\} \Rightarrow n(B) = 6$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 8 + 6 - 4 = 10$$

بیایید در شکل مقابل، تعداد عضوهای $A \cup B$ یعنی قسمت رنگ‌شده را بشمریم.

موقع انجام این کار، تعداد عضوهای $A \cap B$ دو بار

شمرده می‌شود. قسمت سبز رنگ (در شکل) یک بار موقع شمردن عضوهای A و یک بار موقع شمردن عضوهای B . پس باید یک بارش را کم کنیم.

با این حساب، تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه A و B از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

از طرفی، $A \cap B = \{1, 2, 4, 8\}$ و در واقع، $n(A \cap B) = 4$. حالا می‌نویسیم:

مجموعه‌های $A \cap B$ ، $A - B$ و $B - A$ دوه‌دو جدا از هم‌اند. پس:

$$n(A \cup B) = n(A - B) + n(A \cap B) + n(B - A)$$

جدا از حرف‌های بالا، این را هم بلد باشیم:

$$n(A \cap B') = n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$$

درک این حرف، با توجه به نمودار ون قبلی، کار سختی نیست.

هم‌چنین به طور مشابه، می‌توان گفت:

$$n(B \cap A') = n(B - A) = n(B) - n(A \cap B)$$

اگر A و B دو مجموعه جدا از هم باشند ($A \cap B = \emptyset$)، آن‌گاه:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

همیشه مجموعه‌های A و A' جدا از هم‌اند. پس:

$$n(A) + n(A') = n(A \cup A') = n(U)$$

مثال در یک کلاس ۲۶ نفری، ۱۴ نفر عضو تیم فوتبال، ۱۰ نفر عضو تیم بسکتبال و ۳ نفر عضو هر دو تیم هستند.

(الف) چند نفر فقط عضو تیم فوتبال هستند؟

(ب) چند نفر فقط عضو تیم بسکتبال هستند؟

(ج) چند نفر عضو تیم فوتبال یا بسکتبال هستند؟

(د) چند نفر عضو هیچ یک از دو تیم نیستند؟

پاسخ روش اول: مجموعه عضوهای تیم فوتبال را A و مجموعه عضوهای تیم بسکتبال را B می‌گیریم. سؤال گفته:

$$n(U) = 26, n(A) = 14, n(B) = 10, n(A \cap B) = 3$$

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 14 - 3 = 11$$

$$n(B - A) = n(B) - n(A \cap B) = 10 - 3 = 7$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 14 + 10 - 3 = 21$$

$$n(U) - n(A \cup B) = 26 - 21 = 5$$

(الف) فقط فوتبال، یعنی $A - B$:

(ب) فقط بسکتبال، یعنی $B - A$:

(ج) فوتبال یا بسکتبال، یعنی $A \cup B$:

(د) هیچ یک از دو تیم، یعنی متمم $A \cup B$:

روش دوم: یک نمودار ون خوشگل می‌کشیم. اجزای این نمودار، عبارتند از: U (کل کلاس)، $A - B$ (فقط فوتبالی‌ها)،

$B - A$ (فقط بسکتبالی‌ها)، $A \cap B$ (دو رشته‌ای‌ها) و متمم $A \cup B$. اول تعداد عضوهای $A \cap B$ را می‌نویسیم، بعد

با در نظر گرفتن تعداد عضوهای A و B ، تعداد عضوهای $A - B$ و $B - A$ مشخص می‌شود. سپس تعداد عضوهای

$A \cup B$ و در نهایت، متمم آن.

مثال درستی یا نادرستی هر یک از عبارتهای زیر را برای مجموعه‌های دلخواه A و B مشخص کنید.

$$n(A - B) + n(B - A) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \quad \text{(الف)}$$

$$n(A - B) = n(A) \quad \text{(ب) اگر } A \text{ و } B \text{ جدا از هم باشند، آن‌گاه}$$

$$n(A) \leq n(B') \quad \text{(ج) اگر } A \text{ و } B \text{ جدا از هم باشند، آن‌گاه}$$

پاسخ (الف) درست نیست. گفتیم $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$ و $n(B - A) = n(B) - n(A \cap B)$ پس:

$$n(A - B) + n(B - A) = n(A) + n(B) - 2n(A \cap B)$$

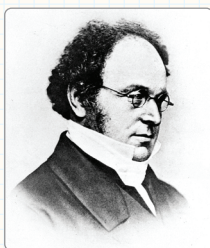
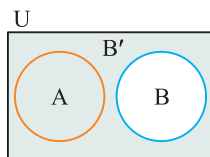
سؤال، به جای $2n(A \cap B)$ نوشته $n(A \cap B)$!

(ب) درست است. اگر A و B جدا از هم باشند، $A - B = A$ همان خواهد بود و در نتیجه $n(A - B) = n(A)$. دقت کنید که در حالت کلی،

و وقتی A و B جدا از هم اند، $A \cap B = \emptyset$ می‌شود و $n(A \cap B) = 0$ می‌گردد.

(ج) درست است. اگر A و B جدا از هم باشند $(A \cap B = \emptyset)$ ، آن‌گاه $A \subseteq B'$ خواهد بود (شکل را ببینید) و در نتیجه $n(A) \leq n(B')$.

به طور مشابه، می‌توان گفت $B \subseteq A'$ و در نتیجه $n(B) \leq n(A')$.



Augustus De Morgan

1806 - 1871



یادداشت مؤلف

اصلاً مگر می‌شود مجموعه‌ها را خواند و قانون دموورگان را نه؟! این قانون زیبا، شاهکار جناب آگوستوس دموورگان ریاضی‌دان و منطق‌دان بریتانیایی است. ایشان دستی بر استقرای ریاضی هم که سال بعد با آن آشنا می‌شوید، داشته‌اند. باهوش خوش تیپ! آگوستوس!

مثال فرض کنیم A و B زیرمجموعه‌هایی از مجموعه مرجع U باشند به طوری که $n(U) = 70$ ، $n(A) = 25$ ، $n(B') = 30$ و $n(A \cap B) = 15$. حاصل این عبارت‌ها را پیدا کنید:

$$n(A \cup B), n(A \cap B'), n(A' \cap B), n(A' \cap B')$$

پاسخ اول دقت کنیم که $n(B) = n(U) - n(B') = 70 - 30 = 40$. حالا برای مورد اول، می‌نویسیم:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 25 + 40 - 15 = 50$$

$$n(A \cap B') = n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 25 - 15 = 10$$

$$n(A' \cap B) = n(B \cap A') = n(B - A) = n(B) - n(A \cap B) = 40 - 15 = 25$$

$$n(A' \cap B') = n(A \cup B)' = n(U) - n(A \cup B) = 70 - 50 = 20$$

قانون دمورگان: برای هر دو مجموعه مثل A و B داریم:

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

اجتماع به اشتراک و اشتراک به اجتماع تبدیل شد!

$$n(A' \cup B') = n(A \cap B)' = n(U) - n(A \cap B)$$

$$n(A' \cap B') = n(A \cup B)' = n(U) - n(A \cup B)$$

دوتای بعدی هم کاری ندارند:

چهارمی را با دمورگان می‌رویم:



یادداشت مؤلف

مبحث مجموعه از کتاب ریاضی ۱، نسبتاً ساده است. اما یک اشتباه می‌تواند همین مبحث نسبتاً ساده را چنان پیچ و تاب دهد که به این راحتی‌ها نتوانید بازش کنید. آن اشتباه، زیادی کشیده شدن به طرف جبر مجموعه‌ها است. منظوری روابط و قوانین جبری یا همان فرمول‌های مربوط به مجموعه‌هاست.

رابطه‌ای مثل $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ به‌طور مشخص در کتاب درسی آمده و ما هم به اندازه کافی روی آن مانور دادیم اما وارد تعمیم این رابطه برای سه مجموعه نشدیم:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

روابطی مثل $A \cap B' = A - B$ ، $A - B = A - (A \cap B)$ و ... در کتاب درسی به‌طور مستقیم یا غیرمستقیم دیده می‌شود و حتی کتاب درسی سعی کرده به‌طور نامحسوس، قوانین دمورگان را نیز به شما نشان دهد. البته بدون ذکر اسم آن! خب این‌ها روابط مهم و پرکاربردی هستند که حتی در فصل احتمال هم به دردمان می‌خورند.

اما روابطی مثل قانون جذب و شبه جذب را در قالب مثال آوردیم و یا قوانین توزیع پذیری اجتماع و اشتراک را نسبت به هم، در دل روش دوم برای حل یک مثال مطرح کردیم. آن هم بدون هیچ جلب توجهی! شتر دیدی ندیدی طور! به خیلی از روابط دیگر مثل توزیع پذیری اشتراک روی تفاضل، اشاره‌ای نکردیم: $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$! این‌ها زیاد به دردتان نمی‌خورند و معمولاً با نمودار و ن می‌توانید مشکلاتان را حل کنید.

خلاصه این‌که موقع خواندن ریاضی، باید درست تصمیم بگیرید که چه فرمول‌ها و روابطی را به خاطر بسپارید و برای چه روابطی، بی‌خیالی طی کنید.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای درس ۲

سطح I

۳۵ در یک کلاس ۳۹ نفری، ۱۶ نفر در گروه ورزش، ۱۲ نفر در گروه روزنامه‌دیواری و ۹ نفر فقط در گروه ورزش هستند. چند نفر آنان عضو هیچ‌یک از این دو گروه نیستند؟

(۱) ۱۵ (۲) ۱۶ (۳) ۱۷ (۴) ۱۸ (ریاضی داخل ۹۸)

۳۶ در یک کلاس ۴۲ نفری، ۱۵ نفر عضو گروه آزمایشگاهی و ۱۲ نفر عضو گروه فوتبال و ۷ نفر آن‌ها عضو هر دو گروه هستند. چند نفر آنان عضو هیچ‌یک از این دو گروه نیستند؟

(۱) ۱۵ (۲) ۱۸ (۳) ۲۱ (۴) ۲۲ (ریاضی خارج ۹۸)

۳۷ اگر A و B دو مجموعه غیر تهی باشند، $(B - A) - (A \cap B')$ با کدام مجموعه مساوی است؟

(۱) $A - B$ (۲) $A \cap B$ (۳) B' (۴) $\emptyset$ (ریاضی خارج ۹۱)

۳۸ اگر $\mathbb{Z}$ مجموعه مرجع باشد، متمم مجموعه $\{x \in \mathbb{Z} \mid x \leq -2 \text{ یا } 3 \leq x\}$ کدام است؟

(۱) $\{-1, 0, 1, 2\}$ (۲) $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$ (۳) $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ (۴) $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ (کتاب درسی)

۳۹ اگر $U = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4\}$ مجموعه مرجع، $A = \{-1, 2, -3, 4\}$ و $B = \{\pm 2, \pm 3, 4\}$ باشد، کدام گزینه درست نیست؟

$$(A \cup B)' = \{1, -4\} \quad (1)$$

$$(A \cap B)' = \{-2, 3, -4\} \quad (2)$$

$$(A - B)' = U - \{-1\} \quad (3)$$

$$(B - A)' = \{\pm 1, 2, -3, \pm 4\} \quad (4)$$

۴۰ اگر $U = [3, 8]$ مجموعه مرجع باشد، متمم مجموعه $A = \{3\} \cup (5, 8]$ به کدام صورت است؟

(۱) بازه نیم باز (۲) بازه باز (۳) بازه بسته (۴) بازه نیست

۴۱ اگر $A = (1, 5] - (2, 3]$ و متمم A را به شکل اجتماع سه بازه بنویسیم، کدام یک از بازه های زیر، یکی از آن سه بازه است؟

(۱) $(5, +\infty)$ (۲) $(2, 3)$ (۳) $[2, 5)$ (۴) $(-\infty, 1]$

۴۲ از ۱۲۰ مشتری یک فروشگاه زنجیره ای، ۸۰ نفر آن ها در یک ماه گذشته از محصولات شرکت A و ۶۲ نفرشان از محصولات شرکت B خرید کرده اند. اگر ۲۷ نفر از

(کتاب درسی)

آنان از هیچ یک از دو شرکت خرید نکرده باشند، چند نفر از هر دو شرکت خرید کرده اند؟

(۱) ۴۵ (۲) ۴۹ (۳) ۵۱ (۴) ۵۳

۴۳ در یک کلاس، تعداد ۱۶ نفر عضو گروه سرود و ۲۳ نفر عضو گروه تئاترند. اگر ۶ نفر عضو هر دو گروه باشند و ۵ نفر عضو هیچ یک از گروه ها نباشند، چند نفر عضو

(کتاب درسی)

گروه سرود نیستند؟

(۱) ۱۵ (۲) ۲۱ (۳) ۲۲ (۴) ۲۸

۴۴ اگر $n(A) = 3$ و $n(A \cap B) = 51$ باشد، $n(A - B)$ کدام است؟

(۱) ۳۴ (۲) ۳۸ (۳) ۴۰ (۴) ۴۶

۴۵ اگر مجموعه های $A - B$ ، $B - A$ و $A \cap B$ به ترتیب ۳۸، ۲۶ و ۷ عضو داشته باشند، $A \cup B$ چند عضو دارد؟

(۱) ۵۷ (۲) ۶۱ (۳) ۶۷ (۴) ۷۱

۴۶ اگر $n(A) + n(B) = 6$ و $n(A \cap B) = 2$ باشد، تعداد عضوهای $A \cup B$ چند برابر تعداد عضوهای $A \cap B$ است؟

(۱) ۶ (۲) ۵ (۳) ۴ (۴) ۳

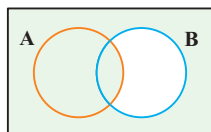
۴۷ اگر $A \subseteq B$ و باشد، آن گاه حتماً است.

(۱) A متناهی، B متناهی (۲) B نامتناهی، A نامتناهی (۳) A نامتناهی، B نامتناهی (۴) A' متناهی، B' متناهی

۴۸ اگر $A = \mathbb{R} - [2, 5]$ و $B = \mathbb{R}^+ - \{5\}$ باشد، نمایش مجموعه $A - (A - B')$ روی محور اعداد حقیقی به کدام صورت است؟

(۱)  (۲)  (۳)  (۴) 

۴۹ قسمت رنگ شده در نمودار روبه رو، کدام مجموعه را نشان می دهد؟



(۱) $A \cup B'$ (۲) $A' \cup B$

(۳) $A' \cup B'$ (۴) $B - A$

۵۰ مجموعه $(W' - Z') \cup N$ با کدام مجموعه مساوی است؟

(۱) $(0, +\infty)$ (۲) $\mathbb{Z}$ (۳) $\mathbb{Z} - \{0\}$ (۴) $\mathbb{W}$

۵۱ متمم مجموعه $A = (2, +\infty)$ نسبت به کدام یک از مجموعه های مرجع زیر، قابل تعریف و به صورت یک بازه بسته است؟

(۱) $\mathbb{R}$ (۲) $\mathbb{R}^+$ (۳) $[0, 8]$ (۴) $[-6, +\infty)$

۵۲ اگر مجموعه های A ، B و $A \cup B$ به ترتیب ۲۵، ۳۵ و ۴۵ عضو داشته باشند، مجموعه $A - B$ چند عضو دارد؟

(۱) ۱۰ (۲) ۱۵ (۳) ۲۰ (۴) ۵

۵۳ اگر $n(A) = n(B) = 28$ و $n(A \cup B) = 3n(A \cap B)$ باشد، $n(A - B)$ کدام است؟

(۱) ۲۵ (۲) ۲۴ (۳) ۲۱ (۴) ۱۴

سطح Q



۵۴ اگر $n(A \cup B) = 57$ و $n(A \cap B) = 3n(A - B) = 4n(B - A)$ باشد، تعداد اعضای مجموعه A کدام است؟

(۱) ۳۳ (۲) ۳۶ (۳) ۴۵ (۴) ۴۸

۵۵ در بررسی ۵۰۰ کشاورز، ۳۷۰ نفر دارای مزرعه چای و ۲۰۰ نفر دارای شالیزار هستند. تعداد آن هایی که نه مزرعه چای و نه شالیزار دارند، برابر تعداد کشاورزانی

(تجربی ۱۴۰۲ نوبت اول)

است که فقط شالیزار دارند. چند کشاورز مزرعه چای دارند؟ (کشاورزان فقط چای و برنج برداشت می کنند.)

(۱) ۱۰۰ (۲) ۱۳۵ (۳) ۲۳۵ (۴) ۲۷۰

۵۶ مجموعه‌های A و B به ترتیب دارای m و k عضو هستند. اگر $m - k = 14$ و اختلاف تعداد اعضای مجموعه‌های $A \cup B$ و $A \cap B$ برابر ۲۰ باشد، مجموعه

(تجربی داخل ۱۴۰۲)

$B - A$ چند عضو دارد؟

- (۱) ۸ (۲) ۶ (۳) ۴ (۴) ۳

۵۷ مجموعه‌های A و B به ترتیب دارای m و k عضو هستند. اگر $m - k = 5$ و تعداد اعضای مجموعه $A \cup B$ برابر ۱۱ باشد، کمترین مقدار ممکن برای m کدام

(تجربی خارج ۱۴۰۲)

است؟

- (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۹

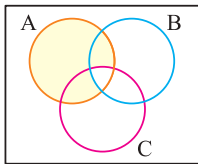
(ریاضی خارج ۱۴۰۱)

۵۸ اگر U مجموعه مرجع و $A' \cup B = A' \cap B'$ باشد، کدام مورد درست است؟

- (۱) $A = B$ (۲) $A = \emptyset$ (۳) $B = U$ (۴) $B = \emptyset$

(انسانی خارج ۹۹)

۵۹ مطابق شکل زیر، فرض کنید A ، B و C سه مجموعه باشند. کدام مورد برای قسمت رنگ‌شده نادرست است؟



(۱) $(A - B) \cup (A - C)$

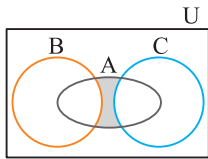
(۲) $A \cap (B' \cup C')$

(۳) $A - (B \cap C)$

(۴) $A - (B \cup C)$

(انسانی داخل ۹۹)

۶۰ مجموعه‌های A ، B و C مطابق شکل مفروض‌اند. کدام مورد برای قسمت رنگ‌شده نادرست است؟



(۱) $A \cap (B' \cap C')$

(۲) $A \cap (B \cup C)'$

(۳) $(A - C) \cap (A - B)$

(۴) $(A - C) \cup (A - B)$

۶۱ مجموعه‌های A و B زیرمجموعه‌هایی از یک مجموعه مرجع نامتناهی هستند. اگر A متناهی و B نامتناهی باشد، چه تعداد از مجموعه‌های $A' \cap B$ ، B' ، A'

و $A' \cap B'$ حتماً نامتناهی هستند؟

- (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱

۶۲ اگر $A \cap B = \emptyset$ و $A \cap C = \emptyset$ ، آنگاه کدام نتیجه‌گیری همواره درست است؟

(۱) $B \cap C = \emptyset$ (۲) $A' \subseteq (B \cup C)$

(۳) $A \cap (B \cup C) = \emptyset$ (۴) $B = C = \emptyset$

۶۳ اگر اجتماع دو مجموعه A و $B - A$ برابر با مجموعه B باشد، کدام نتیجه‌گیری همیشه درست است؟

(۱) $A' \subseteq B'$ (۲) $B' \subseteq A'$ (۳) $A = \emptyset$ (۴) $B = \emptyset$

۶۴ اگر $U = \{2k \mid k \in \mathbb{N}\}$ مجموعه مرجع باشد، متمم مجموعه $A = \{4k \mid k \in \mathbb{N}\}$ کدام است؟

(۱) $A' = \{2k \mid k \in \mathbb{N}\}$ (۲) $A' = \{2k - 1 \mid k \in \mathbb{N}\}$

(۳) $A' = \{4k + 2 \mid k \in \mathbb{N}\}$ (۴) $A' = \{4k - 2 \mid k \in \mathbb{N}\}$

۶۵ متمم کدام مجموعه، درست معرفی نشده است؟

(۱) $(A' \cap B)' = A \cup B'$ (۲) $(A \cap B)' = A' \cup B$

(۳) $(A \cup B)' = A - B$ (۴) $(A - B)' = A' \cup B$

۶۶ اگر $U = \{x \in \mathbb{R} : |x| > 2\}$ مجموعه مرجع باشد، متمم مجموعه $A = \{x \in U : |x| < 3\}$ به کدام صورت است؟

- (۱) اجتماع دو بازه نیم‌باز (۲) اجتماع دو بازه باز (۳) اجتماع سه بازه (۴) اجتماع چهار بازه

۶۷ کدام گزینه درست است؟

(۱) اگر $A - B$ متناهی باشد، A و B متناهی‌اند. (۲) اگر $n(A) \leq n(B)$ آنگاه $A \subseteq B$.

(۳) اگر $A \cap B = (A')'$ آنگاه $B' \subseteq A'$. (۴) اگر $(A - B) \subseteq C$ آنگاه $A \subseteq C$.

۶۸ اگر $\mathbb{N}$ مجموعه مرجع، A' مجموعه اعداد طبیعی تکریمی و B مجموعه اعداد طبیعی و فرد باشد، کدام مجموعه، متناهی است؟

- (۱) $A - B'$ (۲) $B - A$ (۳) $A - B$ (۴) $A' \cup B'$

۶۹ اگر مجموعه اعداد طبیعی به عنوان مجموعه مرجع در نظر گرفته شود، متمم چه تعداد از مجموعه های زیر، متناهی است؟

- (الف) مجموعه اعداد طبیعی و فرد
(ب) مجموعه اعداد طبیعی دورقمی
(ج) مجموعه اعداد اول بزرگتر از ۱۰۰
(د) مجموعه اعدادی که مجموع ارقام آنها حداقل ۲۰ شود.

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۷۰ اگر $A' \subseteq B'$ و مجموعه های A و B به ترتیب ۷ و ۱۱ عضو داشته باشند، مجموعه $A \cup B$ چند عضو دارد؟

(۱) ۴ (۲) ۷ (۳) ۱۱ (۴) ۱۸

۷۱ اگر $n(A) = 24$ و $n(B') = 9$ و $n(A - B) = 9$ باشد، $A \cup B'$ چند عضو دارد؟

(۱) ۲۷ (۲) ۲۹ (۳) ۳۳ (۴) ۳۹

۷۲ اگر مجموعه های A و B جدا از هم باشند و $n(A - B) = 4n(B - A)$ ، آنگاه تعداد عضوهای مجموعه $A \cup B$ چند برابر تعداد عضوهای مجموعه B است؟

(۱) ۵ (۲) ۴ (۳) ۳ (۴) ۲

۷۳ اگر $n(A') = 14$ و $n(B - A) = 6$ باشد، متمم مجموعه $A \cup B$ چند عضو دارد؟

(۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۱۰ (۴) ۱۲

۷۴ در یک کلاس ۳۵ نفری، ۹ نفر به ریاضی علاقه دارند ولی به فیزیک علاقه ندارند. اگر ۱۲ نفر به هیچ یک از این دو درس علاقه نداشته باشند، تعداد کسانی که به

فیزیک علاقه دارند، چند نفر است؟

(۱) ۱۵ (۲) ۱۴ (۳) ۱۳ (۴) ۱۲

۷۵ در یک انتخابات محلی، حداکثر به دو نفر می توان رأی داد. تعداد کسانی که فقط به شخص A رأی داده اند، نصف تعداد کسانی است که فقط به شخص B رأی

داده اند و دو برابر تعداد کسانی است که به هر دو نفر رأی داده اند. اگر ۳۰۰ نفر در انتخابات شرکت کرده باشند و ۹۰ نفر به هیچ یک از این دو نفر رأی نداده باشند،

آرای شخص B چند نفر است؟

(۱) ۶۰ (۲) ۹۰ (۳) ۱۲۰ (۴) ۱۵۰

سطح IQ



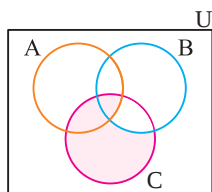
۷۶ اگر A و B دو مجموعه ناتهی از مجموعه مرجع U باشند، مجموعه $[(A \cap B) - B'] \cap [(A \cap B) \cup (A - B)]$ با کدام مجموعه برابر است؟ (ریاضی خارج ۱۴۰۱)

(۱) A (۲) $\emptyset$ (۳) $A - B$ (۴) $A' - B'$

۷۷ بازه های $A = (-\infty, 8]$ ، $B = (-5, 12]$ و $C = [-7, -5]$ مفروض اند و $D = (A' \cup B') \cap C'$. حاصل جمع عضوهای صحیح مجموعه D' کدام است؟

(۱) صفر (۲) ۸ (۳) ۱۱ (۴) ۱۳

۷۸ اگر قسمت رنگی در شکل مقابل، مجموعه D را نشان دهد، کدام گزینه درست است؟



(۱) $D = C - (A - B)$

(۲) $D' = C' \cup (A - B)$

(۳) $D = (C - B) - A$

(۴) $D' = C' \cup (B - A)$

۷۹ مجموعه های A و $A \cap B$ به ترتیب ۱۲ و ۴ عضو دارند. متمم مجموعه $A' \cup B$ چند عضو دارد؟

(۱) ۱۶ (۲) ۱۰ (۳) ۸ (۴) ۶

۸۰ مجموعه مرجع U دارای ۶۲ عضو است. اگر A و B زیرمجموعه هایی از U باشند به طوری که $n(A) = 22$ ، $n(B) = 36$ و $n(A \cup B) = 39$ باشد، مجموعه

$A' \cup B'$ چند عضو دارد؟

(۱) ۳۹ (۲) ۴۱ (۳) ۴۳ (۴) ۴۵

۸۱ اگر A و B زیرمجموعه هایی از مجموعه مرجع U باشند به طوری که $n(U) = 90$ ، $n(A) = 2n(B) = 32$ و $n(A \cap B) = 5$ ، آنگاه حاصل $n(A' \cap B) + n(A' \cap B')$

کدام است؟

(۱) ۴۸ (۲) ۵۲ (۳) ۵۸ (۴) ۶۲

۸۲ اگر $U = (-2, 8]$ مجموعه مرجع باشد، متمم مجموعه $(a, b) \cup (-2, 1)$ فقط دو عضو دارد. مقدار $a + b$ کدام است؟

(۱) صفر (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۹

۸۳ با فرض این که $U = \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq 8\}$ مجموعه مرجع و $A = (-8, 3) \cup \{7, 8\}$ است، A' را به شکل اجتماع سه مجموعه جدا از هم می نویسیم. کدام گزینه،

هیچ یک از آن سه مجموعه نیست؟

(۱) $\{-8\}$ (۲) $[3, 7)$ (۳) $[3, 8)$ (۴) $(7, 8)$

۸۴ اگر $U = \{x \in A \mid x < 10\}$ مجموعه مرجع، $B = \{x \in U \mid x \geq 2\}$ مجموعه‌ای متناهی و B' مجموعه‌ای نامتناهی باشد، A برابر با کدام یک از مجموعه‌های زیر، می‌تواند باشد؟

$$\mathbb{Q} \quad (1) \quad \mathbb{R}^+ \quad (2) \quad \mathbb{Z} \quad (3) \quad \mathbb{N} \quad (4)$$

۸۵ اجتماع دو مجموعه A و B دارای ۴۰ عضو است. مجموعه‌های $A - B$ و $B - A$ به ترتیب ۱۲ و ۱۸ عضو دارند. اگر از هر یک از مجموعه‌های A و B ، ۹ عضو برداشته شود، از مجموعه اشتراک آن‌ها ۴ عضو کم می‌شود. تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه جدید، کدام است؟

$$22 \quad (1) \quad 23 \quad (2) \quad 24 \quad (3) \quad 26 \quad (4)$$

۸۶ از ۵۰ دانش‌آموز یک مدرسه، ۱۳ نفر از نمایشگاه کتابی که با حضور دو انتشارات A و B برگزار شده، هیچ کتابی نخریده‌اند و تعداد کسانی که از انتشارات A خرید کرده‌اند، ۳ برابر تعداد کسانی است که از انتشارات B کتاب خریده‌اند. اگر ۷ نفر فقط از انتشارات B خرید کرده باشند، چند نفر فقط از انتشارات A کتاب خریده‌اند؟

$$30 \quad (1) \quad 27 \quad (2) \quad 24 \quad (3) \quad 21 \quad (4)$$

۸۷ متمم مجموعه $C \cup A' \cup B'$ نسبت به مجموعه مرجع، با کدام مجموعه برابر نیست؟

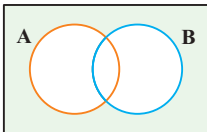
$$(A \cap B) - (A \cap C) \quad (1) \quad (A - C) \cup (B - C) \quad (2)$$

$$A \cap (B - C) \quad (3) \quad (A \cap B) - C \quad (4)$$

آزمون کوچولوی ۱۵ دقیقه‌ای از درس ۱ و ۲



۸۸ قسمت رنگ‌شده در شکل مقابل، کدام مجموعه را نشان می‌دهد؟



$$A' \cup B' \quad (1) \quad A' \cap B' \quad (2)$$

$$A' - B' \quad (3) \quad (A - B)' \quad (4)$$

۸۹ در یک مهمانی ۴۰ نفری، ۷ نفر فقط کباب کوبیده و ۱۰ نفر فقط جوجه کباب دوست دارند. اگر ۴ نفر به هیچ‌یک از این دو غذا علاقه نداشته باشند، چند نفر هر دو غذا را دوست دارند؟

$$16 \quad (1) \quad 19 \quad (2) \quad 20 \quad (3) \quad 22 \quad (4)$$

۹۰ اگر $A = [-3, 4]$ ، $B = (-\infty, -1] \cup (3, 8]$ و $B = \{x \in A - B \mid (2x - 1) \in A - B\}$ باشد، مجموعه مقادیر ممکن برای x کدام است؟

$$[0, 2] \quad (1) \quad (1, 2] \quad (2) \quad [1, 2] \quad (3) \quad (0, 2] \quad (4)$$

۹۱ چه تعداد از مجموعه‌های زیر، متناهی است؟

«مجموعه اعداد طبیعی کم‌تر از ۷، مجموعه اعداد گویای بین ۱ و ۲، مجموعه تمام موجودات زنده»

$$3 \quad (1) \quad 2 \quad (2) \quad 1 \quad (3) \quad 4 \quad (4) \text{ صفر}$$

۹۲ اگر $U = \mathbb{R} - [2, 3]$ مجموعه مرجع باشد، متمم مجموعه $A = (-\infty, 0] \cup [3, 4]$ کدام است؟

$$(0, 2] \cup (4, +\infty) \quad (1) \quad (0, 2) \cup [4, +\infty) \quad (2) \quad (-\infty, 2) \cup [4, +\infty) \quad (3) \quad (0, 2) \cup (4, +\infty) \quad (4)$$

۹۳ مجموعه‌های A و B متعلق به یک مجموعه مرجع ۸۰ عضوی هستند. اگر مجموعه‌های $A \cap B$ ، $A' \cap B$ و $A \cap B'$ به ترتیب ۱۳، ۲۹ و ۳۱ عضو داشته باشند، مجموعه $A' \cap B'$ چند عضو دارد؟

$$14 \quad (1) \quad 47 \quad (2) \quad 7 \quad (3) \quad 5 \quad (4)$$

۹۴ اگر A مجموعه اعداد صحیح کوچک‌تر از ۱۰۰ یا مساوی آن و B مجموعه اعداد طبیعی زوج باشد، کدام مجموعه، متناهی و غیرتهی است؟

$$B - A \quad (1) \quad A \cup B \quad (2) \quad A - B \quad (3) \quad A \cap B \quad (4)$$

۹۵ در یک کلاس ۵۰ نفری، تعداد کسانی که فقط به شیمی علاقه دارند، نصف تعداد کسانی است که فقط به ادبیات علاقه دارند. اگر ۵ نفر به هر دو درس علاقه داشته باشند و ۶ نفر به هیچ‌یک از این دو درس علاقه نداشته باشند، چند نفر به شیمی علاقه دارند؟

$$13 \quad (1) \quad 15 \quad (2) \quad 18 \quad (3) \quad 24 \quad (4)$$

۹۶ اگر $n(A) + n(B) = 28$ و $n(A \cap B) = 6n(A \cup B)$ باشد، مجموعه $(A - B) \cup (B - A)$ چند عضو دارد؟

$$20 \quad (1) \quad 18 \quad (2) \quad 16 \quad (3) \quad 12 \quad (4)$$

۹۷ کدام مجموعه، با مجموعه $A' - B'$ برابر نیست؟

$$B - A \quad (1) \quad A' \cap B \quad (2) \quad (A \cup B) - B \quad (3) \quad B - (A \cap B) \quad (4)$$

هیولآزمون ۲۰ دقیقه‌ای از درس ۱ و ۲



۹۸ مجموعه A دارای ۳۶ عضو و مجموعه B دارای ۲۸ عضو است و اشتراک آن‌ها ۱۵ عضو دارد. اگر ۱۶ عضو از مجموعه A حذف شود، از اشتراک آن‌ها ۹ عضو حذف می‌شود. تعداد عضوهای اجتماع مجموعه جدید با مجموعه B کدام است؟

- (۱) ۲۶ (۲) ۳۳ (۳) ۴۲ (۴) ۴۹

۹۹ کدام گزینه همواره درست است؟

- (۱) اگر $A \cup B = C$ آن‌گاه $A = C - B$.
 (۲) اگر $B \neq \emptyset$ آن‌گاه $A \cup (B - A) = B$.
 (۳) اگر $A \cap B = \emptyset$ آن‌گاه $(A - B) \cup (B - A) = A \cup B$.
 (۴) اگر $A \subseteq (B \cap C)$ آن‌گاه $(A - B) \cup (A - C) = A \cup B \cup C$.

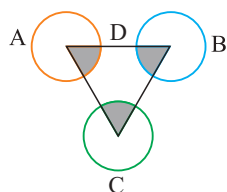
۱۰۰ مجموعه $(A - B) \cup (B - A)$ نامتناهی است. چه تعداد از گزاره‌های زیر، حتماً درست می‌باشد؟

- الف) A و B نامتناهی‌اند. (ب) $A \cap B$ متناهی است. (ج) $A \cap B'$ نامتناهی است. (د) $A' \cap B'$ متناهی است.
 (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۱۰۱ در چند مورد از حالت‌های زیر، نتیجه $A = B$ به طور قطعی به دست می‌آید؟

- الف) $A \cap B' = A' \cap B = \emptyset$ (ب) $A \cap B = A' \cap B' = \emptyset$ (ج) $A \subseteq B$ و $B' \subseteq A'$ (د) $A' = B'$
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۰۲ قسمت رنگی در شکل مقابل، کدام مجموعه را نشان می‌دهد؟



- (۱) $(D - A) \cup (D - B) \cup (D - C)$
 (۲) $(A \cup B \cup C) - D$
 (۳) $(A \cup B \cup C) \cap D$
 (۴) $D - (A \cup B \cup C)$

۱۰۳ اگر برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، بازه $A_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ تعریف شود، حاصل $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots$ کدام است؟

- (۱) $\mathbb{R}$ (۲) $\emptyset$ (۳) $\{0\}$ (۴) $\mathbb{N}$

۱۰۴ A و B دو مجموعه دلخواه هستند. کدام گزینه در حالت کلی نادرست است؟

- (۱) همواره $A' - B' = B - A$.
 (۲) اگر $A \subseteq B$ آن‌گاه $B' \subseteq A'$.
 (۳) اگر $A \cap B = \emptyset$ آن‌گاه $A \cap B' = A$.
 (۴) اگر $A \cap B = \emptyset$ آن‌گاه $A \cap B' = A$.

۱۰۵ اگر $A_i = \{m \in \mathbb{Z} \mid -i \leq m \leq 1 - i\}$ باشد، مجموعه $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i - \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ چند عضو دارد؟

- (۱) ۱۳ (۲) ۱۴ (۳) ۱۵ (۴) ۱۶

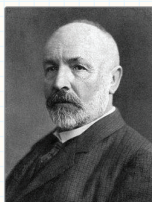
۱۰۶ فرض کنید $U = A \cup B$ مجموعه مرجع و $C = (A - B) \cup (B - A)$. اگر $(A' - B') \cap C = B$ ، کدام عبارت درست است؟

(ریاضی داخل ۱۴۰۰ بخش تست‌های آمار و احتمال)

- (۱) $B \subseteq A$
 (۲) $A \cap B = \emptyset$
 (۳) $A \subseteq B$
 (۴) $A = B$

۱۰۷ یک آموزشگاه کنکور دو کلاس ریاضی و فیزیک دارد و پس از مرحله اول ثبت نام، جمعیت دو کلاس روی هم ۸۰ نفر شده است. در مرحله دوم ثبت نام، جمعیت کلاس ریاضی ۲۰ و جمعیت کلاس فیزیک ۳۰ نفر افزایش یافته و به تعداد کسانی که در هر دو کلاس ثبت نام کرده‌اند، ۱۱ نفر اضافه شده است. اگر تعداد کسانی که در مرحله دوم هم در کلاس ریاضی و هم در کلاس فیزیک ثبت نام کرده‌اند، ۵ نفر باشد (این‌ها قبلاً در هیچ‌یک از کلاس‌ها ثبت نام نکرده بودند)، پس از مرحله دوم ثبت نام، جمعیت دو کلاس روی هم چند نفر است؟

- (۱) ۱۰۴ (۲) ۱۱۴ (۳) ۱۲۴ (۴) ۱۴۴



Georg Ferdinand Ludwig
Philipp Cantor
1845 - 1918



یادداشت مؤلف

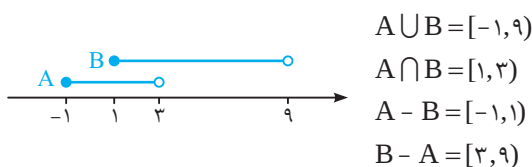
حالا که مبحث شیرین مجموعه‌ها را خواندید، بد نیست بدانید که نظریه مجموعه‌ها (که البته فراتر از مطالبی است که خواندیم)، شاهکار یک خوش تیپ آلمانی است: گئورگ فردیناند لودویگ فیلیپ کانتور.



پاسخ های تشریحی

خدا اموات این دانشمندان و مخترعان و مکتشفان و مبتدعان و متفکران و اهل علم و دوستان دانش و علم بهتر از ثروت است را بیامرزد. یکی از ابداعات مدرن خوشگل این دوستان، همین آزمون‌های آزمایشی است. این که شما به عنوان یک داوطلب سخت‌کوش کنکور، تقریباً هر دو هفته یک بار می‌روید آزمون آزمایشی یکی از این مؤسسات عزیز دل را می‌دهید تا پس از دست و پنجه نرم کردن با سؤالات عجیب و غریب و معلوم‌الحال، یک کارنامه حاوی تمام چیزهایی که با آن‌ها متوجه شوید اوضاعتان خراب است، به شما داده شود و شما خسته‌تر و مضطرب‌تر و ناامیدتر از قبل به مسیرتان ادامه دهید. این خیلی هیجان‌انگیز است! تازه بعضی از این کنکورهای آزمایشی یک آشنایی دارند که شما می‌توانید سؤالات هر آزمون را با جوابش روز قبل آزمون بخرید و این‌طوری رتبه و تراز بهتری به دست آورید و کلی کیف کنید. این برای داوطلبانی که بیماری قلبی دارند و نمی‌توانند با واقعیت روبه‌رو شوند، آشنایی خوبی است. اصلاً بیایید یک کمترین راه بیندازیم به اسم «خرید خدمت کنکور». بعد در کنار تلاش شایانی که برای درس خواندن می‌کنیم، هر دو هفته یک بار سؤالات کنکور آزمایشی را بخریم و جواب‌هایش را حفظ کنیم تا با آمادگی بیشتری حاضر شویم و برای جامعه فرد مفیدی باشیم.

با نمایش A و B روی محور اعداد، اشتراک و تفاضل آن‌ها را پیدا می‌کنیم.



حالا درستی گزینه (۳) و نادرستی سه گزینه دیگر تابلوست!

۶ | ۲ عضوهای A و B را می‌نویسیم:

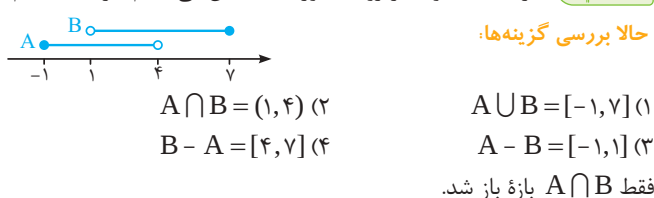
$$A = \{6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, \dots\}$$

$$B = \{12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39\}$$

برای رسیدن به $B - A$ ، باید عضوهای مشترک A و B را از B خط بزیم. در واقع، باید ضرب‌های ۶ را از B حذف کنیم:

$$B - A = \{15, 21, 27, 33, 39\} \text{ شامل ۵ عضو}$$

۷ | ۲ بازه‌های A و B را روی محور اعداد نشان می‌دهیم تا راحت باشیم!



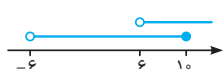
فقط $A \cap B$ بازه باز شد.

۸ | ۲ بررسی گزینه‌ها:

شامل بی‌شمار عدد صحیح: $(3, +\infty) - [2, 4] = [4, +\infty)$ (۱)



شامل ۴ عدد صحیح: $(-6, 10] \cap (6, +\infty) = (6, 10]$ (۲)



شامل ۵ عدد صحیح: $[0, +\infty) - (4, +\infty) = [0, 4]$ (۳)



شامل ۶ عدد صحیح: $[-2, 4] \cap \mathbb{Z} = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ (۴)

۹ | ۲ بررسی گزاره‌ها:

(الف) درست است. چون $A \cap B$ زیرمجموعه A است و برای رسیدن به $(A \cap B) - A$

باید تمام عضوهای A را از $A \cap B$ خط بزیم. خوب چیزی نمی‌ماند که!

(ب) درست است. چون B زیرمجموعه $A \cup B$ است و باز چیزی نمی‌ماند که!

(ج) نادرست است. برای رسیدن به $A \cup B$ ، باید عضوهای A را بریزیم روی B . بعد برای $(A \cup B) - A$ باید دوباره عضوهای A را از آن $A \cup B$ حذف کنیم. خوب عضوهای مشترک A و B هم حذف می‌شوند و ممکن است آن‌چه می‌ماند، B نباشد. مثلاً فرض کنید. $A = \{1, 2\}$ و $B = \{2, 3\}$ در واقع، $(A \cup B) - A = B$.

(د) درست است. برای رسیدن به $A - B$ ، باید عضوهای مشترک A و B از مجموعه A خط بخورد.

۱۰ | ۴ بررسی گزینه‌ها:

(۱) نامتناهی است. $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{-4}, \dots$ تمامی ندارند که!

(۲) نامتناهی است. اشتراک دو بازه، بازه (۱، ۲) می‌شود و بازه‌ها نامتناهی‌اند.

(۳) نامتناهی است. مجموعه ضرب‌های طبیعی هر عدد طبیعی، نامتناهی است!

(۴) متناهی است. اینکه نمی‌توانید تعداد سلول‌ها را بشمرید، دلیل نمی‌شود بگویید نامتناهی!

۱ | ۳ خب $A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ و $A \cap B = \{2, 6\}$. برای رسیدن

به $A - (A \cap B)$ ، باید عضوهای $A \cap B$ را از A خط بزیم که در این صورت،

$\{3, 7, 8\}$ باقی می‌ماند. حالا این سه عضو را از $A \cup B$ خط می‌زنیم:

$$(A \cup B) - [A - (A \cap B)] = \{2, 4, 5, 6, 7, 8\} - \{3, 7, 8\} = \{2, 4, 5, 6\}$$

چهار عضو باقی می‌ماند.

۲ | ۴ بررسی گزینه‌ها:

(۱) درست نیست. وقتی $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ ، چه طور می‌خواهد عضو $\mathbb{Q} - \mathbb{Z}$ باشد؟!

(۲) درست نیست. $\mathbb{Z} - \mathbb{W}$ فقط اعداد صحیح منفی را شامل می‌شود.

(۳) درست نیست. چون $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ ، پس $\mathbb{Q} \cap \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ اما $\mathbb{Q} \cap \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ صحیح نیست.

(۴) درست است. $\mathbb{W} - \mathbb{N} = \{0\}$ و خب $\{0\}$ زیرمجموعه $[-\infty, 0]$ است.

۳ | ۴ بررسی گزینه‌ها:

(۱) درست نیست. برای رسیدن به $A - B$ ، عضوهای مشترک A و B یعنی

۱ و ۲ را از A خط می‌زنیم: $A - B = \{\{1, 2, 3\}\}$. این مجموعه‌ای یک عضوی

است و عضو آن خودش به شکل یک مجموعه است: $\{1, 2, 3\}$. پس با C که

سه عضو ۱ و ۲ و ۳ را دارد فرق می‌کند.

(۲) درست نیست. برای رسیدن به $B - C$ ، عضوهای مشترک B و C یعنی

۱ و ۲ و ۳ را از B خط می‌زنیم:

$$B - C = \{\{1, 2, 3\}\} - \{1, 2, 3\} = \{\{1, 2\}\} \neq \emptyset$$

(۳) درست نیست. در بررسی گزینه قبل فهمیدیم که $B - C$ مجموعه‌ای یک عضوی

می‌شود و عضو آن برابر با مجموعه $\{1, 2\}$ است. اما در این گزینه، $B - C$ شامل دو

عضو ۱ و ۲ معرفی شده است.

(۴) درست است. در بررسی گزینه (۱) فهمیدیم که تنها عضو $A - B$ برابر با

مجموعه $\{1, 2, 3\}$ یعنی C است.

۴ | ۲ بررسی گزینه‌ها:

(۱) $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ شامل اعداد گنگ است و چون با $\mathbb{Z}$ اشتراکی ندارد، $(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) - \mathbb{Z}$

هم همان $\mathbb{Q}'$ می‌باشد. اما $3 \notin \mathbb{Q}'$ پس $\{3, \pi\}$ زیرمجموعه این گزینه نیست.

(۲) $\mathbb{Q} - \mathbb{Z}$ شامل اعداد گویای غیر صحیح (کسری‌ها) است. وقتی قرار است این‌ها را از

$\mathbb{R}$ حذف کنیم، صحیح‌ها می‌مانند و گنگ‌ها. در واقع، این گزینه مجموعه $\mathbb{Q}' \cup \mathbb{Z}$

را معرفی می‌کند. $3 \in \mathbb{Z}$ و $\pi \in \mathbb{Q}'$ پس $\{3, \pi\}$ زیرمجموعه این گزینه است.

(۳) $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ شامل اعداد حقیقی غیر صحیح است، یعنی گویاهای کسری و گنگ‌ها.

وقتی قرار است این‌ها را از $\mathbb{Q}$ حذف کنیم، فقط گویاهای صحیح باقی می‌مانند. در واقع،

این گزینه برابر با مجموعه $\mathbb{Z}$ است که چون $\pi \notin \mathbb{Z}$ ، $\{3, \pi\}$ زیرمجموعه آن نیست.

(۴) گفتیم $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ گویاهای غیر صحیح و گنگ‌ها را شامل می‌شود. حالا $\mathbb{Q}$ یعنی

تمام گویاها را از $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ حذف کنید. چه باقی می‌ماند؟ فقط گنگ‌ها! پس این گزینه

هم مثل گزینه (۱) مساوی $\mathbb{Q}'$ شد و زیرمجموعه $\{3, \pi\}$ ندارد.

۵ | ۳ طرف‌های نامعادله $3 \leq x - 2 < 1$ را در -1 ضرب کنیم:

$$-3 \leq x - 2 < 1 \text{ و حالا با ۲ جمع کنیم: } -1 \leq x < 3. \text{ پس:}$$

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < 2 - x \leq 3\} = \{x \mid -1 \leq x < 3\} = [-1, 3)$$

برویم سراغ B ! وقتی $x \in A$ داریم: $-1 \leq x < 3$ پس $-2 \leq 2x < 6$ و در

نتیجه $1 \leq 2x + 3 < 9$ ، یعنی:

$$B = \{2x + 3 \mid x \in A\} = [1, 9)$$

۱۶/۳ اعضای A و B را بنویسیم:

$$A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \dots\}$$

$$B = \{\frac{1}{8}, \frac{2}{8} = \frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{4}{8} = \frac{1}{2}, \frac{5}{8}, \frac{6}{8} = \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{8}{8} = 1, \frac{9}{8}, \dots\}$$

A و B نامتناهی‌اند. بزرگ‌ترین عضو مجموعه A ، عدد ۱ است و این در حالی است که B فقط هشت عضو کم‌تر از ۱ یا مساوی آن دارد. پس خیالمان راحت است که در بین عضوهای نوشته نشده از دو مجموعه، عضو مشترک نداریم. در واقع:

$$A \cap B = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}\}$$

متناهی بودن $A \cap B$ و درستی گزینه (۳) تابلو شد! با توجه به نامتناهی بودن A و B ، می‌توان با قطعیت گفت که $A \cup B$ نامتناهی است. همچنین با در نظر گرفتن اینکه $A \cap B$ متناهی است، می‌توان از نامتناهی بودن $A - B$ و $B - A$ مطمئن بود.

$$A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \dots\}$$

$$B = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, \dots\}$$

حالا بررسی گزینه‌ها:

(۱) نامتناهی است. $A \cup B$ شامل عدد ۲ و تمام اعداد فرد طبیعی است.

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 7, 9, \dots\} = B \cup \{2\}$$

(۲) نامتناهی است. $A \cap B$ شامل تمام اعداد اول به جز ۲ است:

$$A \cap B = \{3, 5, 7, 11, 13, \dots\}$$

(۳) نامتناهی است. $B - A$ تمام اعداد فرد غیراول را شامل می‌شود:

$$B - A = \{1, 9, 15, 21, \dots\}$$

(۴) متناهی است. تنها عدد اول زوج، ۲ است. پس:

$$A - B = \{2\}$$

۱۸/۳ بررسی گزینه‌ها:

(۱) متناهی است. اشتراک نامتناهی و متناهی، می‌شود متناهی. دقت کنید که اگر اشتراک تهی شود، باز متناهی به حساب می‌آید.

(۲) متناهی است. B متناهی است و احتمالاً تعدادی عضو هم از آن حذف می‌شود تا $B - A$ به دست آید. پس متناهی‌تر می‌شود!

(۳) نامتناهی است. از بی‌شمار عضو A ، تعداد محدودی حذف شود، باز بی‌شمار عضو باقی می‌ماند.

(۴) متناهی است. حاصل این مجموعه تهی می‌شود و $\emptyset$ متناهی است.

۱۹/۴ می‌خواهیم $k \in [2k-11, 3k+6]$ باشد، یعنی $2k-11 \leq k < 3k+6$.

دو نامعادله را جداگانه حل می‌کنیم و از جواب‌ها اشتراک می‌گیریم:

$$2k - 11 \leq k \Rightarrow k \leq 11, \quad k < 3k + 6 \Rightarrow -6 < 2k \Rightarrow -3 < k$$

اشتراک جواب‌ها می‌شود $-3 < k \leq 11$. اما سؤال می‌خواهد k عدد صحیح باشد.

پس $11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0$ که شامل $14 = (-2) + 1$ عدد است.

۲۰/۳ شرط: $A \in \mathbb{A}$ پس $3 - 7 < 5x - 7 < x - 2$. دو نامعادله را جداگانه

حل کنیم و از جواب‌ها اشتراک بگیریم:

$$\begin{cases} x - 2 < 3 \Rightarrow x < 5 \\ 3 < 5x - 7 \Rightarrow 10 < 5x \Rightarrow 2 < x \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} 2 < x < 5$$

۱۱/۴ زمانی از نامتناهی بودن A نتیجه می‌شود B نیز نامتناهی است که

$A \subseteq B$ باشد.

حالا بررسی گزینه‌ها:

(۱ و ۲) هر یک از رابطه‌های $A \cup B = A$ و $A \cap B = B$ زمانی برقرار می‌شود که $B \subseteq A$ باشد. این خلاف چیزی است که ما می‌خواهیم!

(۳) در این حالت، ارتباط خاصی بین A و B برقرار نمی‌شود. یک فرض ساده مثل $A = \mathbb{N}$ و $B = \{0\}$ به راحتی این گزینه را پودر می‌کند!

(۴) خودشه! $A - B$ زمانی تهی می‌شود که تمام عنصرهای A را در خود داشته باشد تا باعث خط خوردن همه اعضای A شود. البته B می‌تواند عضوهای دیگری هم برای خود اختیار کند و در واقع $A \subseteq B$. دنبال همین بودیم!

۱۲/۱ به جای اندیس i در $A_i = [-i, \frac{9-i}{2}]$ ، اعداد ۱، ۲، ۵ و ۷ را قرار

می‌دهیم تا مجموعه‌های موردنظر در صورت سؤال ساخته شوند:

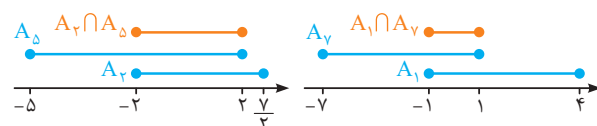
$$i = 1: A_1 = [-1, \frac{9-1}{2}] = [-1, 4]$$

$$i = 2: A_2 = [-2, \frac{9-2}{2}] = [-2, \frac{7}{2}]$$

$$i = 5: A_5 = [-5, \frac{9-5}{2}] = [-5, 2]$$

$$i = 7: A_7 = [-7, \frac{9-7}{2}] = [-7, 1]$$

اشتراک A_2 و A_5 می‌شود $[-2, 2]$ و اشتراک A_1 و A_7 می‌شود $[-1, 1]$:



حالا باید تفاضل حساب کنیم:

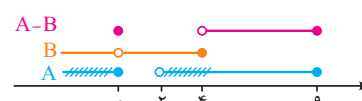


$$(A_2 \cap A_5) - (A_1 \cap A_7) = [-2, -1) \cup (1, 2]$$

۱۳/۳ با نمایش مجموعه‌های A و B روی محور اعداد، می‌فهمیم که

$(-\infty, 0)$ و $(2, 4]$ در دو مجموعه مشترک است و این بازه‌ها باید از A حذف شوند.

بنابراین $A - B = \{0\} \cup (4, 9]$ که شامل ۶ عدد صحیح ۰، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹ است.



۱۴/۲ با یک نیم‌نگاه می‌توان فهمید که $B \cap C = [-1, 4]$! حالا این بازه

را از دل A می‌کشیم بیرون:



$$A - (B \cap C) = [-4, -1) \cup (4, +\infty)$$

در بین بازه‌های داده شده، فقط $[-3, -\sqrt{3})$ زیرمجموعه‌ای از مجموعه بالاست.

۱۵/۲ مجموعه پستانداران روی کره زمین متناهی است (اگرچه شمردن

تعداد آن‌ها دشوار است).

مجموعه اعداد گنگ بین $\sqrt{2}$ و $\sqrt{3}$ نامتناهی است، چون بین هر دو عدد

حقیقی بی‌شمار عدد گنگ وجود دارد. مجموعه اعداد صحیح بین $-\sqrt{2}$ و $\sqrt{2}$

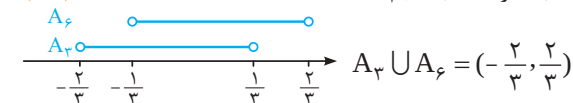
متناهی و فقط شامل سه عضو صفر و ± 1 است.

۲۳ / ۴ به جای n ، اعداد ۳ و ۶ را قرار دهیم تا A_3 و A_6 مشخص شوند:

$$n = 3: A_3 = \left(-\frac{2}{3}, \frac{2-2}{3}\right) = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$$n = 6: A_6 = \left(-\frac{2}{6}, \frac{6-2}{6}\right) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

حالا $A_3 \cup A_6$ را حساب کنیم:



سؤال می‌خواهد A_3 را از آن کم کنیم:



دقت کنید که $(A_3 \cup A_6) - A_3 \neq A_6$.

۲۴ / ۲ بررسی گزاره‌ها:

(الف) درست نیست. اشتراک دو مجموعه نامتناهی، ممکن است متناهی یا نامتناهی باشد. برای رد این گزینه، فرض کنید $A = [1, 2]$ و $B = (0, 1]$. می‌بینید که $A \cap B = \{1\}$ متناهی است. یا فرض کنید $A = \mathbb{N}$ و $B = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq 10\}$ باشد. باز هم $A \cap B = \{1, 2, \dots, 10\}$ متناهی است.

(ب) درست است. اجتماع دو مجموعه متناهی، قاعدتاً متناهی می‌شود!

(ج) درست نیست. با توجه به توضیحاتی که در بررسی گزاره (الف) ارائه کردیم، $A \cap B$ می‌تواند متناهی باشد اما A یا B یا هر دو نامتناهی باشند.

(د) درست نیست. لزومی ندارد A و B هر دو نامتناهی باشند و یکی از آن‌ها هم نامتناهی باشد، $A \cup B$ نامتناهی می‌شود.

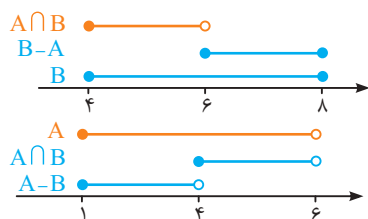
فقط یکی از گزاره‌ها درست از آب درآمد.

۲۵ / ۱ تنها راه این است که سر و ته بازه B بر سر و ته بازه A منطبق

باشد. حالا باز و بسته بودنش مهم نیست. البته چون نمی‌خواهیم $A - B$ تهی شود، B همان A نباشد! در واقع، سه حالت مطلوب داریم: $B = [3, 8]$ ، $B = (3, 8]$ و $B = (3, 8)$. در این صورت، $A - B$ به ترتیب برابر با $\{8\}$ ، $\{3\}$ و $\{3\}$ می‌شود. اگر مثلاً $B = (4, 8]$ باشد، $A - B = [3, 4]$ می‌شود که نامتناهی و نامطلوب است.

۲۶ / ۱ برای رسیدن از $B = [4, 8]$ به $B - A = [6, 8]$ باید $A \cap B$ را

از B حذف کنیم. چه بازه‌ای از $[4, 8]$ حذف شود تا $[6, 8]$ به دست آید؟ خب $A \cap B = [4, 6]$. برای رسیدن از A به $A - B = [1, 4]$ هم باید $A \cap B$ را از A حذف کنیم. پس با اضافه کردن $A \cap B = [4, 6]$ به $A - B = [1, 4]$ دوباره خود A به دست می‌آید:

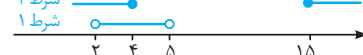


شرط ۲: $A \neq \emptyset$ پس نباید $x - 2 < 13 < 5x - 7$ برقرار شود. یعنی باید داشته باشیم $x - 2 \leq 13$ یا $13 \leq 5x - 7$. دو نامعادله را جداگانه حل کنیم و از جواب‌ها اجتماع بگیریم:

$$\begin{cases} 13 \leq x - 2 \Rightarrow 15 \leq x \\ 13 \leq 5x - 7 \Rightarrow 20 \leq 5x \Rightarrow x \leq 4 \end{cases} \xrightarrow{\text{اجتماع}} x \leq 4 \text{ یا } 15 \leq x$$

هر دو شرط بالا باید با هم برقرار باشد. پس بین نتایج به دست آمده در شرط ۱

و شرط ۲ اشتراک می‌گیریم:



$$(1 \text{ شرط}) \cap (2 \text{ شرط}) \Rightarrow 2 < x \leq 4$$

اما صبر کنید! اگر $x - 2 \geq 5x - 7$ باشد، بازه $(x - 2, 5x - 7)$ تهی می‌شود و همه چیز دود می‌شود می‌رود هوا! پس شرط $x - 2 < 5x - 7$ را هم برای تهی نشدن بازه بنویسیم:

$$x - 2 < 5x - 7 \Rightarrow 5 < 4x \Rightarrow \frac{5}{4} < x$$

اشتراک $2 < x \leq 4$ و $\frac{5}{4} < x$ می‌شود بازه $(2, 4]$.

۲۱ / ۲ چه‌طور ممکن است اشتراک دو بازه بسته برابر با مجموعه‌ای تک‌عضوی

شود، تنها حالت ممکن این است که انتهای یکی بر ابتدای دیگری منطبق باشد. آیا در این سؤال، حالت $A \cdot B$ ممکن است؟ منظورم این است که آیا انتهای A یعنی $k + 12$ می‌تواند بر ابتدای B یعنی k منطبق شود؟ خب معلوم است که نه! چون $k + 12$ همیشه بزرگ‌تر از k است. پس باید ترتیب را عوض کنیم و B را قبل از A قرار دهیم: $B \cdot A$. منظور این است که انتهای B یعنی $k + 5$ بر ابتدای A یعنی $2k - 1$ منطبق باشد:

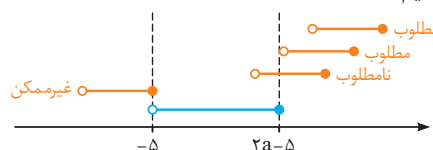
$$k + 5 = 2k - 1 \Rightarrow k = 6$$

در این صورت، بازه $A = [2k - 1, k + 12]$ به صورت $A = [11, 18]$ و بازه $B = [k, k + 5]$ به صورت $B = [6, 11]$ درمی‌آید که اشتراک آن‌ها مجموعه تک‌عضوی $\{11\}$ و اجتماع آن‌ها $A \cup B = [6, 18]$ است.

۲۲ / ۲ اول دقت کنیم که برای تهی نبودن هر کدام از بازه‌های نیم‌باز، لازم است نقطه ابتدای آن‌ها از نقطه انتهایشان کوچک‌تر باشد:

$$a + 1 < 9 \Rightarrow a < 8, -5 < 2a - 5 \Rightarrow 0 < a \xrightarrow{\text{اشتراک}} 0 < a < 8$$

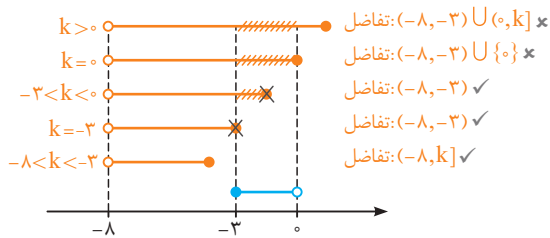
حالا بریم سراغ اینکه بازه‌ها جدا از هم باشند، یعنی اشتراکشان تهی شود. برای این منظور، لازم است نقطه انتهای بازه‌ای که سمت چپ قرار می‌گیرد، از نقطه ابتدای بازه دیگر، جلوتر (بزرگ‌تر) نباشد. در شکل‌های زیر، موقعیت‌های مختلف بازه $[a + 1, 9]$ را نسبت به بازه $[-5, 2a - 5]$ در نظر گرفته‌ایم و حالت‌های مطلوب را مشخص کرده‌ایم.



بازه $[a + 1, 9]$ نمی‌تواند سمت چپ بازه $[-5, 2a - 5]$ قرار بگیرد و وقتی سمت راست آن قرار می‌گیرد، برای تهی شدن اشتراک دو بازه، لازم است نقطه ابتدای $[a + 1, 9]$ یعنی $a + 1$ از نقطه انتهای $[-5, 2a - 5]$ یعنی $2a - 5$ کم‌تر نباشد:

$$a + 1 \geq 2a - 5 \Rightarrow a \leq 6$$

اشتراک $0 < a < 8$ و $a \leq 6$ می‌شود $0 < a \leq 6$.



دو تا از حالت‌ها، مطلوب هستند. اجتماع، $k = -3$ و $-3 < k < 0$ می‌شود $-3 \leq k < 0$ که شامل ۳ عدد صحیح $-3, -2, -1$ برای k است.

۳۱ | بررسی گزینه‌ها:

(۱) تفاضل دو مجموعه نامتناهی A و B ممکن است متناهی یا نامتناهی باشد. مثلاً اگر $A = \mathbb{W}$ و $A = \mathbb{N}$ باشد، $B = \mathbb{N}$ باشد، $A - B = \{0\}$ متناهی است. اگر $A = \mathbb{R}$ و $B = \mathbb{Q}$ باشد، $A - B = \mathbb{Q}'$ نامتناهی است. وقتی تکلیف $A - B$ معلوم نیست، در مورد اجتماع آن با مجموعه متناهی C چیز قطعی نمی‌توان گفت.

(۲) به خاطر متناهی بودن C ، اشتراک A و C متناهی می‌شود و وقتی B را هم از $A \cap C$ کم کنیم، احتمالاً تعداد دیگری از عضوهایش حذف می‌شود. یعنی $B - (A \cap C)$ متناهی است.

(۳) وقتی C متناهی را از A ی نامتناهی کم کنیم، مجموعه نامتناهی $A - C$ به دست می‌آید که اشتراک آن با مجموعه نامتناهی B ، می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد.

(۴) به خاطر متناهی بودن C ، اشتراک B و C متناهی می‌شود. اما وقتی مجموعه حاصل را از A ی نامتناهی کم می‌کنیم، حاصل یعنی $A - (B \cap C)$ همچنان نامتناهی باقی می‌ماند.

۳۲ | بازه $[5 - 2n, n - 6]$ شامل x هایی است که $5 - 2n \leq x < n - 6$. با فرض طبیعی بودن n (صورت سؤال این را خواسته)، $n - 6$ عددی صحیح است و عدد صحیح قبل از آن می‌شود $n - 7$ ، پس تعداد اعداد صحیح موجود در بازه، برابر با تعداد اعداد صحیح از $5 - 2n$ تا $n - 7$ است که می‌شود آخری منهای اولی به علاوه ۱: $12 - 3n = (n - 7) - (5 - 2n) + 1$ تعداد اعداد صحیح می‌خواهیم این تعداد، حداقل n و حداکثر $2n$ باشد: $2n \leq 12 - 3n \leq 2n$ از طرفی: $5 \leq n \Rightarrow 11 \leq 2n \Rightarrow 11 \leq 3n - 11 \Rightarrow 22 \leq 3n \Rightarrow n \leq 11$

اشتراک نتایج می‌شود $5 \leq n \leq 11$ که با توجه به طبیعی بودن n ، باید بگوییم $n = 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11$. حاصل جمع این مقادیر، می‌شود ۵۱.

۳۳ | در حالت کلی، برای اشتراک دو بازه دلخواه، سه حالت ممکن است رخ دهد: بازه شود، مجموعه‌ای تک‌عضوی شود، تهی شود.

$A \cap B$ بازه شده است.

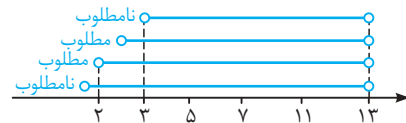
$A \cap B$ مجموعه‌ای تک‌عضوی شده است.

$A \cap B = \emptyset$ تهی شده است.

پس حالت‌های مطلوب در این سؤال، این است که اشتراک در بازه مجموعه‌ای تک‌عضوی شود یا تهی شود. چون این‌ها مجموعه‌های متناهی محسوب می‌شوند، اما اگر اشتراک دو بازه، یک بازه شود، حاصل مجموعه‌ای نامتناهی به حساب می‌آید.

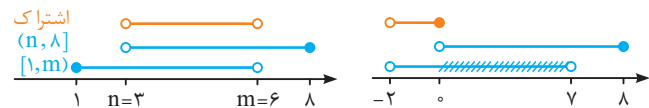
۲۷ | اعداد اول قبل از ۱۳ عبارتند از ۲، ۳، ۵، ۷، ۱۱. ما فقط چهارتای آخر

یعنی ۳، ۵، ۷، ۱۱ را می‌خواهیم. دو سر بازه، باز و انتهای آن ثابت است. ما باید ابتدای بازه یعنی $1 - \frac{x}{p}$ را جاهایی قرار دهیم که ۳ درون بازه قرار بگیرد ولی ۲ درون بازه نباشد. پس ابتدای بازه باید قبل از ۳ و یا بعد از ۲ باشد:



$$2 \leq \frac{x}{p} - 1 < 3 \xrightarrow{+1} 3 \leq \frac{x}{p} < 4 \xrightarrow{\times p} 6 \leq x < 8 \Rightarrow x \in [6, 8)$$

۲۸ | اگر $m \leq n$ باشد، دو بازه $[1, m]$ و $(n, 8]$ جدا از هم و فاقد اشتراک خواهند بود. پس همین اول کار دقت کنیم که $m > n$ است. در واقع، m انتهای اشتراک دو بازه یعنی ۶ و n ابتدای اشتراک دو بازه یعنی ۳ را می‌دهد. حالا به ازای $m = 6$ و $n = 3$ ، مجموعه $(0, 8] - (3, 6] = (0, 3) \cup (6, 8]$ درمی‌آید که برابر می‌شود با $(-2, 0] - (-2, 7)$.



۲۹ | بازه $[-7, k+6]$ را از $\mathbb{R}$ کم کنیم: $\mathbb{R} - [-7, k+6] = (-\infty, -7) \cup [k+6, +\infty)$

بزرگ‌ترین مجموعه‌ای که با بازه $[2k-5, 2k+3]$ فاقد اشتراک است، متمم آن می‌باشد:

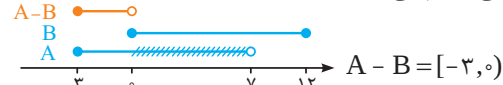
$$[2k-5, 2k+3] \text{ متمم } = (-\infty, 2k-5) \cup [2k+3, +\infty)$$

خلاصه این‌که باید $(-\infty, -7) \cup [k+6, +\infty)$ زیرمجموعه‌ای از مجموعه $(-\infty, 2k-5) \cup [2k+3, +\infty)$ باشد. برای این کار، لازم است دو شرط زیر برقرار باشد:

$$-7 \leq 2k-5 \Rightarrow -2 \leq 2k \Rightarrow -1 \leq k$$

اشتراک حرف‌های بالا می‌شود $-1 \leq k \leq 3$ که ۵ عدد صحیح ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ را برای k شامل می‌شود.

۳۰ | اول $A - B$ را پیدا کنیم. با نمایش مجموعه‌های A و B روی محور اعداد، به راحتی معلوم می‌شود که:



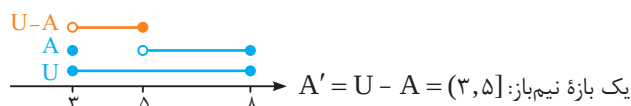
حالا می‌خواهیم $C - (A - B)$ یعنی $(-8, k] - [-3, 0)$ غیرتهی و برابر با یک بازه شود. در شکل‌های زیر، بازه $[-3, 0)$ و ابتدای بازه $(-8, k]$ یعنی عدد -8 را فیکس کرده‌ایم و حالت‌های ممکن برای k را در نظر گرفته‌ایم. پس در هر حالت، قسمت‌هایی از $(-8, k]$ را که برای رسیدن به $(-8, k] - [-3, 0)$ باید از آن حذف کرد، خط زده‌ایم. حالت‌های مطلوب، آن‌هایی هستند که قسمت باقی‌مانده از $(-8, k]$ به شکل یک بازه باشد.

(۲) درست نیست. $A \cap B = \{2, -3, 4\}$ خب $A \cap B$ و متمم آن یعنی $(A \cap B)'$ می شود $\{1, -2, 3, -4\}$ که ما ± 1 را در این گزینه نمی بینیم.

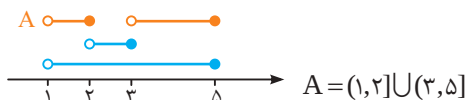
(۳) درست است. برای رسیدن به $A - B$ ، عضوهای $A \cap B$ را از A خط می زنیم که در این صورت به $A - B = \{-1\}$ می رسیم. متمم این مجموعه، $(A - B)' = U - \{-1\}$ است.

(۴) درست است. برای رسیدن به $B - A$ ، عضوهای $A \cap B$ را از B خط می زنیم که در این صورت به $B - A = \{-2, 3\}$ می رسیم و متمم آن $(B - A)' = \{\pm 1, 2, -3, \pm 4\}$ است.

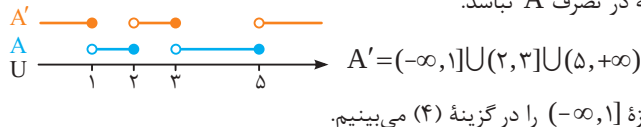
۴۰ | ۱ باید $U - A$ را پیدا کنیم. یعنی عضوهای A را از U خط بزنیم:



۴۱ | ۴ متمم A را در $\mathbb{R}$ می خواهیم. اجازه دهید اول تکلیف خود A را معلوم کنیم! باید عضوهای بازه $(2, 3]$ را از $(1, 5]$ حذف کنیم:



حالا برای متمم A یعنی $\mathbb{R} - A$ ، جاهایی از محور اعداد را انتخاب می کنیم که در تصرف A نباشد.



بازه $(-\infty, 1]$ را در گزینه (۴) می بینیم.

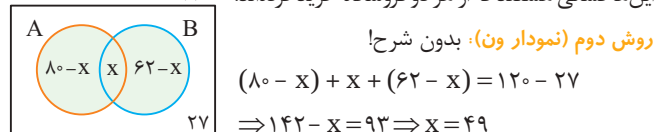
۴۲ | ۲ روش اول (جبری): $n(U) = 120$ ، $n(A) = 80$ و $n(B) = 62$ آن هایی که از هیچ یک از دو شرکت A و B خرید نکرده اند، متمم $A \cup B$ را می سازند: $n(A \cup B)' = 27$.

بنابراین: $n(A \cup B) = n(U) - n(A \cup B)' = 120 - 27 = 93$

از طرفی: $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

پس: $93 = 80 + 62 - n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cap B) = 49$

این ها کسانی هستند که از هر دو فروشگاه خرید کرده اند.



۴۳ | ۳ روش اول (جبری): گروه سرود را A و گروه تئاتر را B می گیریم.

یعنی $n(A) = 16$ و $n(B) = 23$. سؤال گفته ۶ نفر عضو هر دو گروه اند.

$n(A \cap B) = 6$ و $n(A \cup B)' = 5$ نفر عضو هیچ یک نیستند:

ما دنبال $n(A')$ هستیم. خب می نویسیم:

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 16 + 23 - 6$

$\Rightarrow n(A \cup B) = 33$

اگر عضوهای $A \cup B$ و متمم آن $(A \cup B)'$ را بریزیم روی هم، مجموعه مرجع یعنی کل کلاس به دست می آید:

$n(U) = n(A \cup B) + n(A \cup B)' = 33 + 5 = 38$

حالا: $n(A') = n(U) - n(A) = 38 - 16 = 22$

برای آن که اشتراک دو بازه $(-\infty, 3x - 2]$ و $[x + 6, +\infty)$ تهی شود، باید ته بازه اول یعنی $3x - 2$ و سر بازه دوم یعنی $x + 6$ روی هم قرار بگیرند (با هم مساوی شوند):

$$3x - 2 = x + 6 \Rightarrow 2x = 8 \Rightarrow x = 4$$

و برای آن که اشتراک دو بازه تهی شود، باید ته اولی عقبتر از سر دومی قرار بگیرد (کوچکتر از آن باشد):

$$3x - 2 < x + 6 \Rightarrow 2x < 8 \Rightarrow x < 4$$

پس در کل باید $x \leq 4$ باشد و در نتیجه مجموعه مقادیر مطلوب برای x ، بازه نیم باز و نامتناهی $(-\infty, 4]$ است.

۳۴ | ۳ در حالت کلی، زمانی می توان از نامتناهی بودن یک مجموعه مثل B ،

نامتناهی بودن مجموعه دیگری مثل A را نتیجه گرفت که $B \subseteq A$ باشد. پس باید گزینه ای را انتخاب کنیم که اولاً زیرمجموعه $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid 1 \leq x \leq 2\}$ باشد، ثانیاً نامتناهی باشد. مجموعه های معرفی شده در هر چهار گزینه نامتناهی هستند و در نتیجه شرط زیرمجموعه بودن کفایت می کند.

بررسی گزینه ها:

(۱) عضوهای این مجموعه، در بازه $[0, 1]$ قرار می گیرند نه $[1, 2]$. پس زیرمجموعه A نیست.

(۲) عضوهای این مجموعه، در بازه $(1, 2]$ قرار می گیرند، اما مشکل این جاست که همه آن ها گویا نیستند و این مجموعه هم زیرمجموعه A نیست.

(۳) عضوهای این مجموعه گویا و به شکل $1 + \frac{1}{n}$ هستند، پس در بازه $(1, 2]$ قرار می گیرند. این مجموعه، زیرمجموعه A است و مناسب می باشد.

(۴) عضوهای این مجموعه که به شکل $1 - \frac{1}{n}$ هستند، در بازه $[0, 1)$ قرار می گیرند نه $[1, 2]$. پس ایشان هم زیرمجموعه A نیستند.

۳۵ | ۴ ۹ نفر فقط در گروه ورزش هستند، پس $16 - 9 = 7$ نفر، هم در

گروه ورزش هستند هم در گروه روزنامه دیواری. با

این حساب $12 - 7 = 5$ نفر فقط در گروه روزنامه دیواری هستند. تعداد عضوهای اجتماع دو گروه می شود $21 = 9 + 7 + 5$. پس $39 - 21 = 18$ نفر عضو هیچ یک از گروه ها نیستند.

۳۶ | ۴ خب $15 - 7 = 8$ نفر فقط عضو گروه

آزمایشگاهی و $12 - 7 = 5$ نفر فقط عضو گروه فوتبال هستند. تعداد عضوهای اجتماع دو گروه می شود $20 = 8 + 7 + 5$ پس $42 - 20 = 22$ نفر عضو هیچ یک از این دو گروه نیستند.

۳۷ | ۱ $A \cap B'$ همان $A - B$ است. از طرفی، مجموعه های $A - B$ و

$B - A$ همیشه جدا از هم هستند (اشتراک ندارند). بنابراین:

$$(A \cap B') - (B - A) = (A - B) - (B - A) = A - B$$

کلاً اگر $E \cap F = \emptyset$ باشد، آن گاه $E - F = E$. در این سؤال، $E = A - B$ و $F = B - A$

۳۸ | ۱ در واقع، $A = \{\dots, -4, -3, -2, 3, 4, 5, \dots\}$ که اعداد صحیح

از -1 تا 2 را شامل نمی شود، بنابراین:

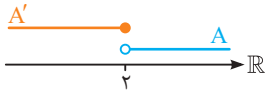
$$A' = \mathbb{Z} - A = \{-1, 0, 1, 2\}$$

بررسی گزینه ها:

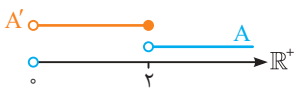
(۱) درست است. $A \cup B = \{-1, \pm 2, \pm 3, 4\}$ خب $A \cup B$ که متمم آن در مجموعه مرجع U می شود $(A \cup B)' = \{1, -4\}$.

۵۱ / ۴ بررسی گزینه‌ها:

(۱) متمم $A = (2, +\infty)$ در مجموعه مرجع $\mathbb{R}$ ، به صورت $A' = (-\infty, 2]$ می‌باشد که بازه بسته نیست.

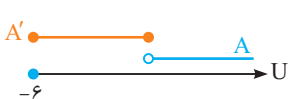


(۲) متمم $A = (2, +\infty)$ در مجموعه مرجع $\mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$ به صورت $A' = (0, 2]$ می‌باشد که این هم بسته نیست.



(۳) بازه $(2, +\infty)$ زیرمجموعه $[2, 8]$ نیست و در واقع $A = (2, +\infty)$ در مجموعه مرجع $U = [0, 8]$ قابل تعریف نمی‌باشد.

(۴) متمم $A = (2, +\infty)$ در مجموعه مرجع $U = [-6, +\infty)$ به صورت



(۵۲ / ۱) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ و $n(A \cap B) = 6$ هستند! از رابطه مربوط به $n(A \cup B)$ کمک می‌گیریم:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$\Rightarrow 45 = 25 + 25 - n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cap B) = 15$$

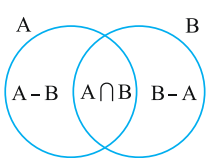
حالا می‌نویسیم: $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 25 - 15 = 10$

(۵۳ / ۴) در رابطه مربوط به $n(A \cup B)$ ، به جای $n(A)$ و $n(B)$ قرار می‌دهیم ۲۸ و به جای $n(A \cup B)$ می‌نویسیم $3n(A \cap B)$:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \Rightarrow 3n(A \cap B)$$

$$= 28 + 28 - n(A \cap B) \Rightarrow 4n(A \cap B) = 56 \Rightarrow n(A \cap B) = 14$$

حالا می‌نویسیم: $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 28 - 14 = 14$



در حالت کلی، اجتماع سه مجموعه $A \cup B$ ، $A - B$ و $B - A$ است که دو به دو از یکدیگر جدا هستند. پس:

$$n(A \cup B) = n(A - B) + n(A \cap B) + n(B - A)$$

در این سؤال، می‌نویسیم:

$$57 = \frac{4}{3}n(B - A) + 4n(B - A) + n(B - A)$$

$$\Rightarrow 57 = \frac{19}{3}n(B - A) \Rightarrow n(B - A) = 57 \times \frac{3}{19} = 9$$

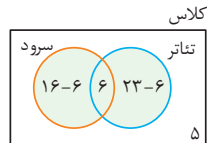
$$n(A \cap B) = 4n(B - A) = 36$$

$$n(A - B) = \frac{4}{3}n(B - A) = \frac{4}{3} \times 9 = 12$$

$$n(A) = n(A - B) + n(A \cap B) = 12 + 36 = 48$$

(۵۵ / ۲) یک نمودار ون خوشگل رسم می‌کنیم و به ساده‌ترین شکل ممکن، به جای تعداد عضوهای نواحی مختلف آن، پارامتر می‌گذاریم:

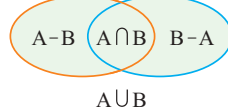
با توجه به صورت سؤال که گفته بود تعداد برنج‌کاران با تعداد هیجی‌نکاران (!) برابر است، پارامتر z را در دو ناحیه از شکل قرار دادیم.



(۴۴ / ۱) سؤال گفته ۵۱ و $n(A \cap B) = 17$ این را هم بلدیم که

$$n(A - B) = 51 - 17 = 34 \quad \text{پس: } n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$$

(۴۵ / ۴) کلاً مجموعه‌های $B - A$ ، $A - B$ و $A \cap B$ دو به دو مجزا از هم هستند و اجتماع آن‌ها $A \cup B$ را می‌سازد.



$$n(A \cup B) = n(A - B) + n(A \cap B) + n(B - A) = 34 + 17 + 26 = 77$$

(۴۶ / ۲) این رابطه را در حالت کلی داریم:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

حالا سؤال گفته به جای $n(A) + n(B)$ می‌توانیم قرار دهیم $6n(A \cap B)$:

$$n(A \cup B) = 6n(A \cap B) - n(A \cap B)$$

$$\Rightarrow n(A \cup B) = 5n(A \cap B) \Rightarrow \frac{n(A \cup B)}{n(A \cap B)} = 5$$

۴۷ / ۳ بررسی گزینه‌ها:

(۱) درست نیست. متناهی بودن یک زیرمجموعه، متناهی بودن خود مجموعه را ایجاب نمی‌کند. مثلاً فرض کنید $A = \{1\}$ و $B = \mathbb{N}$.

(۲) درست نیست. نامتناهی بودن یک مجموعه، نامتناهی بودن زیرمجموعه‌ای دلخواه از خود را ایجاب نمی‌کند. همان فرض $A = \{1\}$ و $B = \mathbb{N}$ دندان شکن است!

(۳) درست است. وقتی B قرار است A نامتناهی را در دل خود داشته باشد، محکوم است به نامتناهی بودن!

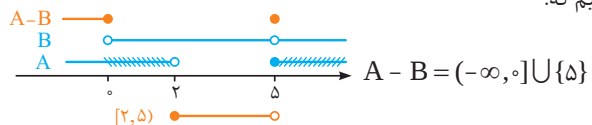
(۴) درست نیست. از $A \subseteq B$ نتیجه می‌شود $B' \subseteq A'$ و مشابه گزینه (۱)، متناهی بودن یک زیرمجموعه، متناهی بودن خود مجموعه را ایجاب نمی‌کند.

(۴۸ / ۲) $A - B'$ همان $A \cap (B')' = A \cap B$ است که در این صورت،

$A - (A - B')$ به صورت $A - (A \cap B)$ درمی‌آید و این خود خود

$A - B$ است! با نمایش مجموعه‌های A و B روی محور اعداد، به راحتی

می‌فهمیم که:



سؤال، نمایش هندسی $A - B$ را خواسته که در گزینه (۲) دیده می‌شود.

(۴۹ / ۱) قسمت سفید، $B - A$ است و قسمت رنگی، متمم آن یعنی $(B - A)'$

می‌باشد. از طرفی، $B - A = B \cap A'$ و طبق قانون دمورگان، متمم آن می‌شود:

$$(B \cap A')' = B' \cup A$$

در متمم‌گیری، اشتراک به اجتماع تبدیل شد!

(۵۰ / ۳) کلاً $A - B = A \cap B'$ پس:

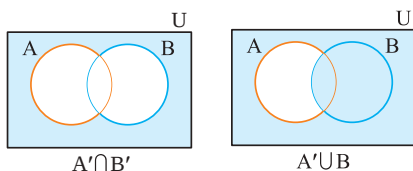
$$\mathbb{W}' - \mathbb{Z}' = \mathbb{W}' \cap (\mathbb{Z}')' = \mathbb{W}' \cap \mathbb{Z} = \mathbb{Z} \cap \mathbb{W}' = \mathbb{Z} - \mathbb{W}$$

$\mathbb{W} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ پس $\mathbb{Z} - \mathbb{W}$ اعداد صحیح منفی را شامل می‌شود. حالا

قرار است $\mathbb{N}$ را هم به آن اضافه کنیم. خب فقط سر صفر بی‌کلاه می‌ماند!

$$(\mathbb{W}' - \mathbb{Z}') \cup \mathbb{N} = \{-n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \mathbb{N} = \mathbb{Z} - \{0\}$$

۵۸ / ۴ خودتان را اذیت نکنید و با نمودار ون قال قضیه را بکنید!



برای $A' \cap B'$ می‌توانستیم از قانون دمورگان هم کمک بگیریم که می‌گوید این مجموعه با $(A \cup B)'$ مساوی است. به هر حال، $A' \cup B'$ نسبت به $A' \cap B'$ یک B کامل اضافه دارد (قسمت‌های رنگی دو مجموعه را ببینید). پس تساوی این دو مجموعه، ایجاب می‌کند که $B = \emptyset$ باشد.

۵۹ / ۴ نادرست بودن گزینه «۴» در همان نگاه اول به گزینه‌ها، تابلو است! در مورد برابری سه گزینه دیگر، دقت کنید که:

$$A \cap (B' \cup C') \xrightarrow{\text{دمورگان}} A \cap (B \cap C)' \xrightarrow{X \cap Y' = X - Y} A - (B \cap C)$$

$$A - (B \cap C) \xrightarrow{\text{توزیع پذیری تفاضل روی اشتراک}} (A - B) \cap (A - C)$$

۶۰ / ۳ نادرست بودن گزینه «۳» در همان نگاه اول به گزینه‌ها، تابلو است! در مورد برابری سه گزینه دیگر، دقت کنید که:

$$A \cap (B' \cap C') \xrightarrow{\text{دمورگان}} A \cap (B \cup C)' \xrightarrow{X \cap Y' = X - Y} A - (B \cup C)$$

$$A - (B \cup C) \xrightarrow{\text{توزیع پذیری تفاضل روی اجتماع}} (A - B) \cap (A - C)$$

۶۱ / ۳ بررسی موارد:

A' : حتماً نامتناهی است. در هر مجموعه مرجع نامتناهی، متمم یک مجموعه متناهی، نامتناهی می‌شود. این خیلی تابلوست!

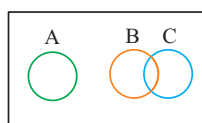
B' : ممکن است متناهی یا نامتناهی باشد. مثلاً مجموعه مرجع را $\mathbb{N}$ بگیرید. اگر B مجموعه اعداد زوج باشد، B' مجموعه اعداد فرد و نامتناهی است. اما اگر $B = \{2, 3, 4, 5, \dots\}$ باشد، متمم آن $B' = \{1\}$ متناهی است.

$A' \cap B$: این همان $B - A$ است. از مجموعه نامتناهی B ، عضوهای مشترک آن با مجموعه متناهی A را حذف می‌کنیم. حتماً نامتناهی است.

$A' \cap B'$: اشتراک A' نامتناهی با B' مجهول الحال (!)، ممکن است متناهی یا نامتناهی باشد.

$A' \cap B$ و $A' \cap B'$ نامتناهی حتمی‌اند. دو تا!

۶۲ / ۳ شکل زیر، یک تنه سه گزینه (۱)، (۲) و (۴) را له می‌کند! درستی گزینه (۳) هم تا حد زیادی مشخص است! در واقع وقتی A نه B اشتراک دارد، نه C ، پس با اجتماع B و C هم اشتراکی نخواهد داشت. از قانون توزیع پذیری (بخشی) اشتراک روی اجتماع هم می‌شد استفاده کرد:



$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$$

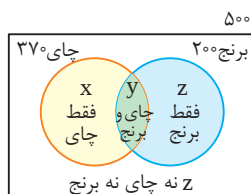
۶۳ / ۲ برای رسیدن به $B - A$ ، عضوهای مشترک A و B را از B حذف کرده‌ایم. حالا سؤال می‌خواهد وقتی تمام عضوهای A را به $B - A$ اضافه کنیم، عضو جدیدی وارد کار نشود و حاصل همان B شود. این اتفاق زمانی می‌افتد که $A \subseteq B$ باشد.

حالا با توجه به صورت سؤال، می‌نویسیم.

$$x + y = 370$$

$$x + z = 200$$

$$x + y + z + z = 500$$



رابطه آخر به شکل $x + y + 2z = 500$ نوشته می‌شود و طبق رابطه اول، $370 + 2z = 500 \Rightarrow z = 65$ پس: $x + y = 370$

حالا از رابطه دوم، داریم: $x + z = 200 \Rightarrow x = 200 - z = 200 - 65 = 135$

۵۶ / ۴

روش اول (جبری): رابطه‌ای که به سرعت، تعداد عضوهای $A \cup B$ و $A \cap B$ را به هم وصل می‌کند، این است: $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$. سؤال گفته $n(A \cup B) - n(A \cap B) = 20$ ، پس می‌توانیم در رابطه بالا به جای $n(A \cup B)$ بنویسیم $n(A \cap B) + 20$. هم‌چنین رابطه $m - k = 14$ در صورت سؤال، می‌گوید مجموعه A ، ۱۴ عضو بیشتر از مجموعه B دارد: $n(A) - n(B) = 14$ و در نتیجه $n(A) = n(B) + 14$. پس در رابطه بالا، به جای $n(A)$ هم می‌نویسیم $n(B) + 14$:

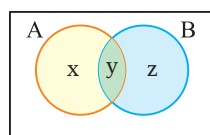
$$\frac{n(A \cap B) + 20}{n(A \cup B) \text{ همان}} = \frac{n(B) + 14}{n(A) \text{ همان}} + n(B) - n(A \cap B)$$

$$\Rightarrow 2n(B) - 2n(A \cap B) = 20 - 14 \Rightarrow n(B) - n(A \cap B) = 3$$

از طرفی $n(B) - n(A \cap B)$ همان $n(B - A)$ است، پس:

$$n(B - A) = 3$$

روش دوم (نمودار ون): تعداد عضوهای سه ناحیه را در شکل زیر با سه پارامتر دلخواه مشخص کرده‌ایم. پارامتر z مربوط به ناحیه $B - A$ است و ما دنبال همین بزرگوار هستیم! با توجه به صورت سؤال، مجموعه A ، ۱۴ عضو بیشتر از B دارد، پس:



$$x - z = 14$$

دقت کنید که y تعداد عضوهای مشترک A و B است و در رابطه مربوط به اختلاف تعداد عضوهای نقشی ندارد. هم‌چنین سؤال گفته $n(A \cup B) - n(A \cap B) = 20$ ، پس:

$$(x + y + z) - y = 20 \Rightarrow x + z = 20$$

با جمع دو رابطه $x - z = 14$ و $x + z = 20$ نتیجه می‌شود $2x = 34$ پس $x = 17$.

حالا از $x - z = 14$ به مقدار $z = 3$ می‌رسیم و تمام!

۵۷ / ۳

برای تعداد اعضای مجموعه $A \cup B$ ، این رابطه کلی را داریم:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

با توجه به صورت سؤال، $n(A) = m$ ، $n(B) = k = m - 5$ و $n(A \cup B) = 11$. پس رابطه بالا، این شکلی می‌شود:

$$11 = m + (m - 5) - n(A \cap B) \Rightarrow 2m = 16 + n(A \cap B)$$

$$\Rightarrow m = 8 + \frac{n(A \cap B)}{2}$$

$n(A \cap B)$ عددی حسابی است و کمترین مقدار آن صفر می‌باشد (وقتی A و B جدا از هم هستند). بنابراین کمترین مقدار m برابر است با $8 + 0 = 8$.